18. Metódy diferenciálneho počtu 1.

Limity a súčty

Priklad 1 : Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

Priklad 2 : Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - x^2}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}$

Priklad 3 : Dokážte $n(1+x)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$

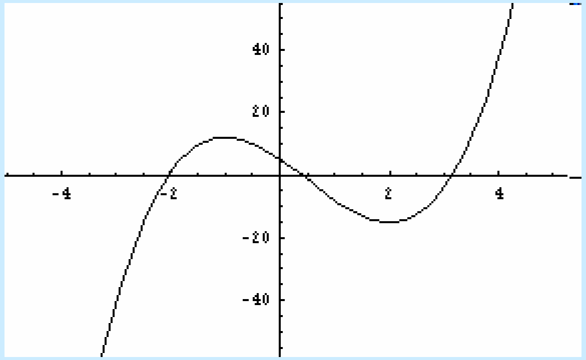
Maximá a minimá

Veta 18.1 :

Nech funkcia f je diferemcovateľná v bode x. Ak D $f(x)>0$, potom existuje okolie U bodu x také, že $f(y) < f(x) < f(z)$, pre ľubovoľné body $y, z \in$ U a platí $y < x < z$.
Ak D $f(x) < 0$, potom existuje okolie U bodu x také, že $f(y) > f(x) > f(z)$, pre ľubovoľné body y, z okolia U také, že $y < x < z$.

Veta 18.2 :

Nech x je vnútorný bod intervalu I a f je funkcia, ktorá je diferencovateľná v x, pre ktoré D $f(x)\neq 0$. Potom funkcia f nemá maximálnu hodnotu alebo minimálnu hodnotu na intervale I v bode x.



Kritéria určenia maxima a minima v bode *x* :

1. derivácia D $f(x)=0$
2. derivácia v bode x neexistuje
3. x krajný bod intervalu

Priklad 1 : Nájdite maximá a minimá funkcie $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$ pre každé x.

Veta 18.3 :

Nech f je funkcia spojitá na intervale I a diferencovateľná v každom bode tohto intervalu.

Funkcia f je neklesajúca (rastúca) na intervale I práve, keď D $f(x) \geq 0$ (D $f(x) > 0$), pre každý vnútorný bod $x \in$ I.

Funkcia f je nerastúca (klesajúca) na intervale I práve, keď D $f(x) \leq 0$ (D $f(x) < 0$), pre každý bod vnútri intervalu I.

Veta 18.4 (Veta o prírastku funkcie – Rolleho):

Nech funkcia f je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Nech funkcia f je diferencovateľná v ľubovoľnom bode $x\in(a,b)$. Nech $f(a) = f(b)$, potom existuje také číslo $\xi\in(a,b)$, že $D\,f(\xi) = 0$.

Veta 18.5 (Veta o prírastku funkcie – Lagrangeová) :

Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a,b\rangle$ a nech má deriváciu v každom bode otvoreného intervalu (a,b). Potom existuje také číslo $\xi\in(a,b)$, že

$f(b) - f(a) = D\,f(\xi)\,(b - a)$

(*Poznámka : medzi bodmi a,b musí existovať ξ, kde dotyčnica v ξ je rovnobežná s priamkou prechádzajúcou bodmi* $(a, f(a))$, $(b, f(b))$)

Definícia 18.1 :

Nech je daná funkcia f na intervale I.

Hovoríme, že funkcia f je konvexná na I, ak pre každé dva body $x_1, x_2\in$ I

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Hovoríme, že funkcia f je rýdzokonvexná na I, ak pre každé dva body $x_1, x_2\in$ I

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Definícia 18.1 (pokračovanie) :

Hovoríme, že funkcia f je konkávna na I, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in$ I

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Hovoríme, že funkcia f je rýdzokonkávna na I, ak pre každé dva body $x_1, x_2 \in$ I

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Veta 18.6 :

Nech funkcia f je diferencovateľná vnútri intervalu a nech v týchto bodoch existuje druhá derivácia.

Ak pre každý vnútorný bod intervalu I platí $D^2 f(x)>0$, potom je funkcia na I konvexná.

Ak pre každý vnútorný bod intervalu I platí $D^2 f(x)<0$, potom je funkcia na I konkávna.

Asymptoty :

bez smernice - *rovnobežné s osou y* (*rovnica* ***x=a***)

Ak nájdeme a∈R

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \ \textit{alebo} \ \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty, \ \textit{alebo} \ \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

asymptota so smernicou (*rovnica* ***y = ax+b***)

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - ax\right)$$

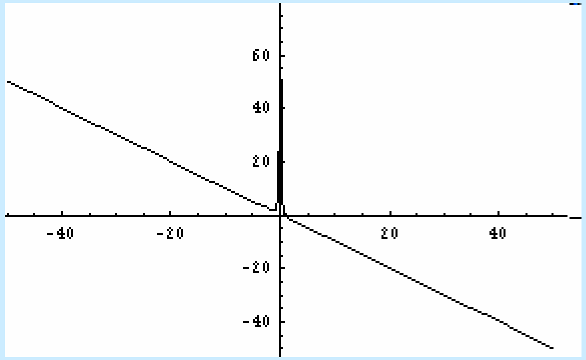
$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - ax\right)$$

Priklad 2 : Určíte asymptoty funkcie $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$

Vyšetrenie priebehu funkcie :

1) Definičný obor funkcie
2) Zistíme body nespojitosti (kde pretína os *x*,*y*)
3) Zistíme ako funkcia vyzerá v bodoch nespojitosti (kde je kladná a kde záporná)
4) Zistíme, či má všade deriváciu
5) Zistíme lokálne maximá a minimá funkcie
6) Intervaly monotónnosti (kde rastie, klesá)
7) Zistíme, kde je konvexná a kde konkávna
8) Inflexné body (body zmeny z konvexnej na konkávnu a opačne)
9) Asymptoty funkcie
10) Načrtnúť graf funkcie

Priklad 3 : Vyšetrite priebeh funkcie $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2}$



Veta 18.7 (Veta o prírastku funkcie – Cauchyho) :

Nech funkcie f a g sú spojité v uzavretom intervale $\langle a,b\rangle$ a majú deriváciu v každom bode $x\in(a,b)$ je $\mathrm{D}\,g(x)\neq 0$

Potom existuje číslo $c\in(a,b)$ také, že $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{\mathrm{D}\,f(c)}{\mathrm{D}\,g(c)}$

Dôsledok 1 vety 18.7 :

Pre každé $x\in(a,b)$, ak $\mathrm{D}\,f(x)=0$, potom $f(x)$ je konštantná na (a,b).

Dôsledok 2 vety 18.7 (l'Hospitalovo pravidlo):

Nech $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to a}|g(x)| = \infty$ a nech existuje okolie čísla a, v ktorom majú funkcie f a g derivácie a nech existuje limita (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{D}\,f(x)}{\mathrm{D}\,g(x)}$ potom existuje limita (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{D}\,f(x)}{\mathrm{D}\,g(x)}$$

Veta 18.8 (Postačujúca podmienka pre hľadanie lokálnych extrémov.):

Nech funkcia f má v bode x_0 prvých n derivácií až po rad n, pričom $n \geq 2$.

Nech D $f(x_0)=0$, $D^2 f(x_0)=0$, ... $D^{(n-1)} f(x_0)=0$, ale $D^n f(x_0) \neq 0$.

Ak číslo n - nepárne, funkcia f nemá lokálny extrém, má v bode x_0 inflexný bod

ak $D^n f(x_0) < 0$ rýdzokonkávna na nejakom okolí x_0

$D^n f(x_0)>0$ - rýdzokonvexná na nejakom okolí x_0

n - párne, funkcia f má v bode x_0 ostrý lokálny extrém,

ak $D^n f(x_0)<0$ - ostré lokalne maximum v bode x_0

$D^n f(x_0)>0$ - ostré lokálne minimum v bode x_0