17. Základné pojmy diferenciálneho počtu

Definícia 17.1 :

Funkciu f nazývame diferencovateľnú v bode x, ak existuje funkcia φ spojitá v bode 0 taká, že

$$f(x+u) - f(x) = \varphi(u) \,.\, u \text{ v každom } u \text{ v okolí bodu 0.}$$

Priklad 1 : Nech $f(x) = x^3$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Ukážeme, že funkcia f je diferencovateľná v bode 2.

Priklad 2 : Nech $f(x) = |x-2|$ pre každé číslo x. Potom funkcia f nie je diferencovateľná v bode 2.

Definícia 17.2 :

Nech funkcia f bude diferencovateľná v bode x. Potom hodnota $\varphi(0)$, spojitej funkcie φ v bode 0 pričom $f(x+u) - f(x) = \varphi(u).u$, pre každé $u \neq 0$ v okolí 0 sa nazýva defivácia funkcie f v bode x a označuje D $f(x)$.

Priklad 1* : Nech $f(x) = x^3$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$. Vypočítajte jej deriváciu v bode 2.

Priklad 2* : Nech $f(x) = |x-2|$ pre každé číslo x. Ukážte, že funkcia f nemá deriváciu v bode 2.

Priklad 3 : Nech funkcia f je konštantná na I (otvorenom intervale).Potom funkcia f je diferencovateľná v každom bode I a D $f(x) = 0$ pre každé $x \in$ I.

Priklad 4 : Nech $f(x) = x$ pre každé $x \in (-\infty,\infty)$. Potom funkcia f je diferencovateľná v každom bode na reálnej osi D $f(x) = 1$ pre každé $x \in (-\infty,\infty)$

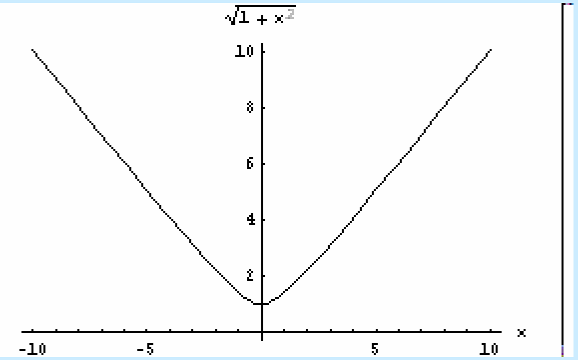
Priklad 5 : Nech $f(x) = x^{-1}$ pre každé $x \neq 0$. Ukážeme, že funkcia f je diferencovateľná v každom nenulovom bode a že D $f(x) = -x^{-2}$, pre každé $x \neq 0$.

Veta 17.1 :

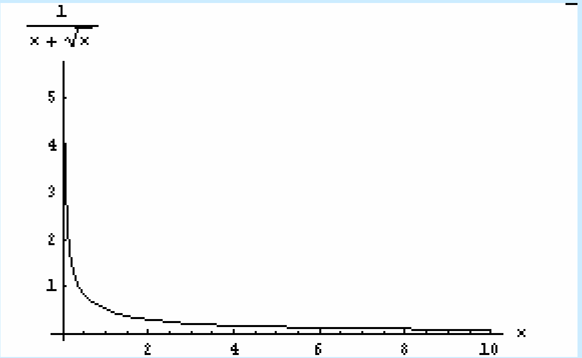
Funkcia *f* je diferencovateľná v bode *x* ak a iba ak limita $\lim_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}$ existuje

Ak funkcia *f* je diferencovateľná v bode *x*, potom $D f(x) = \lim_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}$

Priklad 6 : Nech $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ pre každé $x \in (-\infty,\infty)$. Funkcia *f* je diferencovateľná v každom bode $x \in (-\infty,\infty)$.



Priklad 7 : Nech $f(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$, pre každé $x > 0$.



Spojitosť diferencovateľných funkcií

Veta 17.2 :

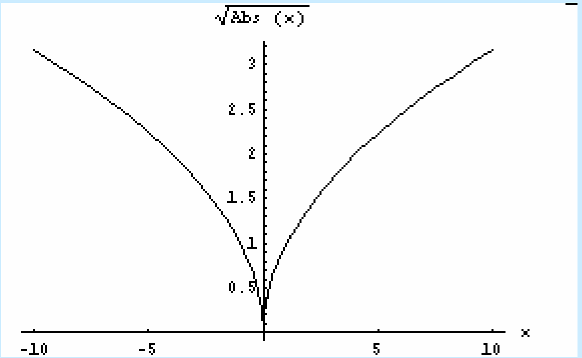
Funkcia je spojitá v každom bode, v ktorom je diferencovateľná

Veta 17.3 :

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x, potom existuje číslo L také, že

$$|f(x+u) - f(x)| \leq L\,|u| \quad \text{pre každé v okolí O.}$$

Priklad 8 : Nech $f(x) = \sqrt{|x|}$ pre každé $x \in (-\infty,\infty)$ táto funkcia je spojitá v bode 0.



Počítanie s diferenciálnymi funkciami

Veta 17.4 :

Ak f je funkcia diferencovateľná v bode x a c je číslo, potom funkcia $c.f$ je tiež diferencovateľná v bode x a $\mathrm{D}\,(c.f)(x) = c.\mathrm{D}\,f(x)$.

Veta 17.5 :

Ak funkcie f a g sú diferencovateľné v bode x, potom tiež funkcia $f + g$ a

$$\mathrm{D}\,(f+g)(x) = \mathrm{D}\,f(x) + \mathrm{D}\,g(x)$$

Veta 17.6 :

Nech n je prirodzené číslo a nech pre každé $j=1,2,...,n$ c_j je číslo a f_j je funkcia diferencovateľná v bode x. Potom funkcia

$f = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ je tiež diferencovateľná v bode x a $\mathrm{D}\,f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathrm{D} f_j$

Veta 17.7 :

Ak funkcie f a g sú diferencovateľné v bode x, potom funkcia $f.g$ je tiež diferencovateľná v bode x a

$$\mathrm{D}\,(f.g)(x) = g(x).\mathrm{D}\,f(x) + f(x).\,\mathrm{D}\,g(x)$$

Veta 17.8 :

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x a $f(x)\neq 0$, potom funkcia f^{-1} je tiež diferencovateľná v bode x a $\mathrm{D}\,(f^{-1})(x) = -f^{-2}(x).\mathrm{D}\,f(x)$.

Priklad 9 : Nech k je prirodzené číslo. Nech $h(x) = x^{-k}$, pre každé $x\neq 0$. Potom funkcia h je diferencovateľná v bode $x\neq 0$ a

$$\mathrm{D}\,h(x) = -k.x^{-k-1},\ \text{pre každé } x\neq 0.$$

Veta 17.9 :

Ak funkcia f a g sú diferencovateľné v bode x a $f(x)\neq 0$. Potom funkcia $\frac{g}{f}$ je tiež diferencovateľná v bode x a

$$\mathrm{D}\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{f(x)\mathrm{D}g(x) - g(x)Df(x)}{f^{2}(x)}$$

Veta 17.10 (Derivácia zloženej funkcie):

Ak funkcia f je diferencovateľná v bode x a funkcia g je diferencovateľná v bode $y=f(x)$, potom zložená funkcia $h = g \circ f$ je diferencovateľná v bode x a

$$\mathrm{D}\, h(x) = \mathrm{D}\, g(y).\mathrm{D}\, f(x).$$

Priklad 10 : Nech $h(x) = \sqrt{1+(3x^5+1)^2}$ $x \in (-\infty,\infty)$. Vypočítajte D $h(x)$ v každom bode x, v ktorom existuje.

Veta 17.11 :

Nech g je funkcia prostá a spojitá na intervale (a,b). Nech f je inverzná funkcia k funkcii f na danom intervale (a,b). Predpokladajme, že funkcia g je diferencovateľná v bode $y \in (a,b)$ a že D $g(y) \neq 0$. Nech $x = g(y)$. Potom funkcia f je diferencovateľná v bode x a

$$\mathrm{D}\, f(x) = \frac{1}{\mathrm{D}g(y)}.$$

Veta 17.12 :

Ak m a n sú prirodzené čísla, potom $\mathrm{D}^{n+m} f = \mathrm{D}^{n}.(\mathrm{D}^{m} f)$, pre ľubovoľnú funkciu f.

Veta 17.13 :

Nech n^k je prirodzené číslo, c_j ľubovolné čísla a f_j funkcie n-krát diferencovateľné v bode x. Potom funkcia

$$f = \sum_{j=1}^{k} c_j f_j \qquad \text{je tiež } n\text{-krát diferencovateľná v bode } x$$

$$\text{a } \mathrm{D}^n f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathrm{D}^n f_j(x).$$

Veta 17.14 :

Nech n je prirodzené číslo. Ak funkcie f a g sú n-krát diferencovateľné v bode x, potom funkcie $f.g$ sú tiež n-krát diferencovateľné v bode x a

$$\mathrm{D}^n(f.g)(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathrm{D}^j f(x) \mathrm{D}^{n-j} g(x)$$