16. Limity a nerovnosti, nevlastné limity

Veta 16.1 :

Ak $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a+} f(x)=k \\ \lim\limits_{x\to a+} g(x)=l\end{array}\right\}$ a ak $f(x) \le g(x)$, pre každé $x \in (a, d)$ potom $k \le l$

Ak $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a-} f(x)=k \\ \lim\limits_{x\to a-} g(x)=l\end{array}\right\}$ a ak $f(x) \le g(x)$, pre každé $x \in (c, a)$ $c < a$ potom $k \le l$

Ak $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a+} f(x)=k \\ \lim\limits_{x\to a+} g(x)=l\end{array}\right\}$ a ak $f(x) \le g(x)$, pre každé $x \ne a$ na intervale (c, d) pre $c < a < d$ potom $k \le l$

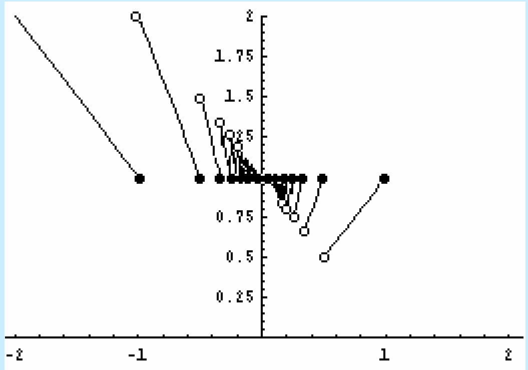
Ak $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=k \\ \lim\limits_{x\to \infty} g(x)=l\end{array}\right\}$ a ak $f(x) \le g(x)$, pre každé x na intervale (a,∞), potom $k \le l$

Ak $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=k \\ \lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=l\end{array}\right\}$ a ak $f(x) \le g(x)$, pre každé x na intervale $(-\infty,a)$, potom $k \le l$.

Veta 16.2 :

Ak $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ a ak $\lim g(x) = k = \lim h(x)$ potom tiež $\lim f(x) = k$

Priklad 1 : Dokážte existenciu limity $\lim_{x \to 0+} x\left[\frac{1}{x}\right]$



Nevlastné limity

Definícia 16.1 :

Nech a je číslo, hovoríme že funkcia f má nevlastnú limitu sprava v bode a rovnú ∞, ak pre každé číslo v existuje $d>a$ také, že $v < f(x)$ pre každé $x \in (a, d)$. Značíme $\lim_{x \to a+} f(x) = \infty$

Definícia 16.2 :

Nech a je číslo hovoríme, že funkcia f má nevlastnú limitu v bode a rovnú $-\infty$, ak pre každé n existuje $d>a$ také, že $f(x)<n$ pre každé $x \in (a,d)$.
Píšeme $\lim_{x \to a+} f(x) = -\infty$

Definícia 16.3 :

Nech a je číslo, hovoríme že funkcia f má nevlastnú limitu zľava v bode a rovnú ∞, ak pre každé číslo v existuje $d < a$ také, že $v < f(x)$ pre každé $x \in (d, a)$. Značíme $\lim_{x \to a-} f(x) = \infty$

Definícia 16.4 :

Nech a je číslo hovoríme, že funkcia f má nevlastnú limitu zľava v bode a rovnú $-\infty$, ak pre každé n existuje $d < a$ také, že $f(x) < n$, pre každé $x \in (d, a)$. Píšeme $\lim_{x \to a-} f(x) = -\infty$

Definícia 16.5 :

Funkcia f má nevlastnú limitu v bode $-\infty$ rovnú ∞, ak pre každé číslo v existuje číslo d také, že $v < f(x)$ pre každé $x \in (-\infty, d)$.
Značíme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

Definícia 16.6 :

Hovoríme, že funkcia f má v bode $-\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$, ak pre každé n, existuje číslo d také, že $f(x) < n$ pre každé $x \in (-\infty, d)$.
Značíme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Definícia 16.7 :

Funkcia f má nevlastnú limitu v bode ∞ rovnú ∞, ak pre každé číslo v existuje číslo d také, že $v < f(x)$ pre každé $x \in (d, \infty)$.

Značíme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Definícia 16.8 :

Hovoríme, že funkcia f má v bode ∞ nevlastnú limitu $-\infty$, ak pre každé n, existuje číslo d také, že $f(x) < n$ pre každé $x \in (d, \infty)$.

Značíme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Definícia 16.9 :

Hovoríme, že funkcia f má nevlastnú limitu v bode a, ak má nevlastnú limitu zľava v bode a a nevlastnú limitu sprava v bode a, a v oboch bodoch prípadoch rovnú ∞.

Teda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

Definícia 16.10 :

Hovoríme, že funkcia f má nevlastnú limitu v bode a, ak má nevlastnú limitu zľava v bode a a nevlastnú limitu sprava v bode a, a v oboch bodoch prípadoch rovnú $-\infty$.

Teda $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Veta 16.3 :

Ak $f(x) > 0$, potom $\lim f(x) = \infty$ práve vtedy, keď $\lim\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$

Ak $f(x) < 0$, potom $\lim f(x) = -\infty$ práve vtedy, keď $\lim\left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$

Vety o spojitých funkciách

Definícia 16.11 :

Funkciu f nazveme spojitá na intervale $I = \langle a,b \rangle$ ak:

i) je zľava spojitá v každom bode intervalu $(a,b\rangle$

ii) je sprava spojitá v každom bode intervalu $\langle a,b)$

Veta 16.4 :

Nech a, b sú čísla také, že $a<b$ a nech f je funkcia spojitá na intervale $\langle a, b \rangle$ taká, že $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$.
Potom existuje bod $x \in (a,b)$ taký, že $f(x) = 0$ a $f(z) > 0$ pre každé $z \in (x, b\rangle$

Veta 16.5 :

Nech a, b sú čísla také , že $a< b$ a f spojitá funkcia na $\langle a,b \rangle$. Ak y je číslo medzi $f(a)$ a $f(b)$ potom existuje číslo c v intervale $\langle a,b \rangle$ také , že $f(c) = y$.

Veta 16.6 :

Nech a, b sú čísla také , že $a< b$ a f spojitá funkcia na $\langle a,b \rangle$. Ak y je číslo medzi $f(a)$ a $f(b)$ potom existuje číslo c v intervale $\langle a,b \rangle$ také , že $f(c) = y$.

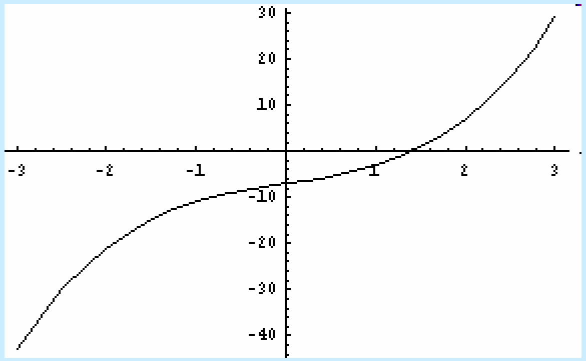
Veta 16.7 (Fundamentálna veta algebry**) :**

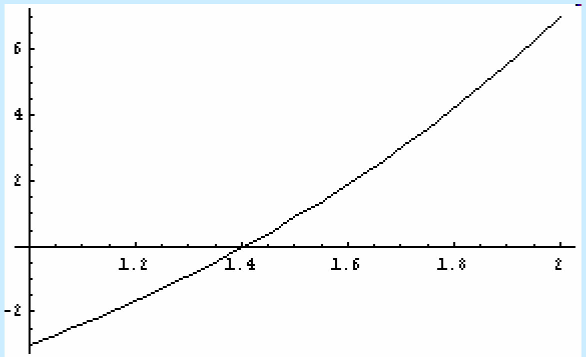
Každý polynóm nepárneho stupňa má najmenej jeden reálny koreň.

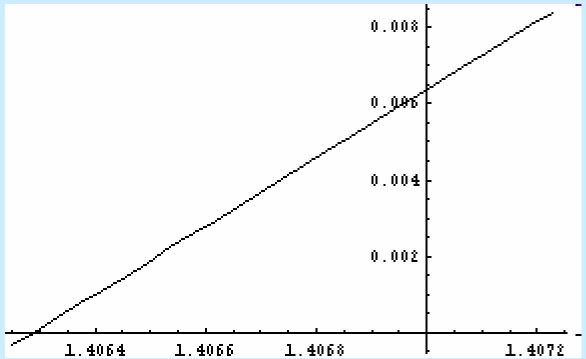
Priklad 1 : Nájdite koreň rovnice $x^3 - 3x - 7 = 0$ s presnosťou 0,001.

1	-3	1	-3	1,25	-1,29688	1,375	-0,27539	1,375	-0,27539
1,5	0,875	1,25	-1,29688	1,375	-0,27539	1,4375	0,282959	1,40625	-0,00034
2	7	1,5	0,875	1,5	0,875	1,5	0,875	1,4375	0,282959

1,40625	-0,00034	1,40625	-0,00034	1,40625	-0,00034	1,40625	-0,00034	1,40625	-0,00034
1,421875	0,14027	1,414063	0,069708	1,410156	0,034622	1,408203	0,017127	1,407227	0,008392
1,4375	0,282959	1,421875	0,14027	1,414063	0,069708	1,410156	0,034622	1,408203	0,017127







Veta 16.8 :

Funkcia spojitá a prostá na intervale je potom rýdza monotónna na tom intervale.

Veta 16.9 (Weierstrassova veta o ohraničenosti spojitej funkcie) **:**

Ak funkcia f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ potom f je ohraničená na $\langle a,b\rangle$.

Veta 16.10 (Weierstrassova veta o maxime a minime spojitej funkcie) **:**

Ak funkcia f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ potom $\exists\ c_1, c_2 \in \langle a,b\rangle$ také, že $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, pre $x \in \langle a,b\rangle$