# 15. Limita bode, operácie s limitami

**Definícia 15.1** :

Nech funkcia $f$ je daná, tiež bod $a$ a číslo $k$. Označme $F$ ako funkciu, pre ktorú:

i) $F(x) = f(x)$ pre každé $x \neq a$ v definičnom obore funkcie $f$

ii) $F(a) = k$

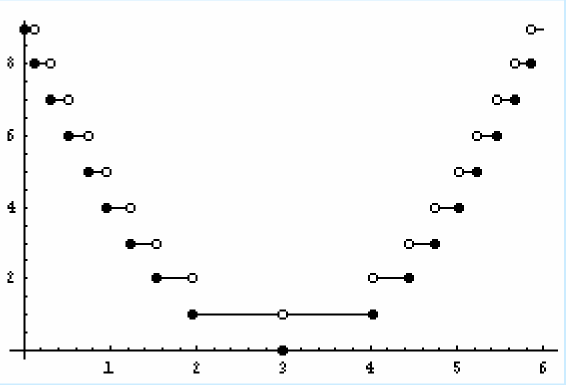
Limita funkcie $f$ v bode (resp. zľava, sprava v bode) $a$ je číslo $k$, pričom funkcia $F$ definovaná i) ii) je spojitá (resp. zľava, sprava spojitá) v bode $a$.

Priklad 1 : Vypočítajte hodnotu limity funkcie $f$ v bode 3, ak $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

pre každé $x \neq 9$.

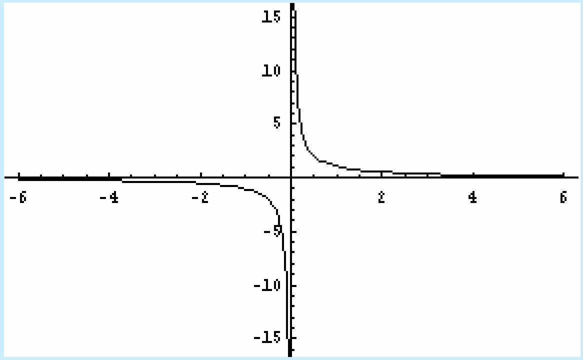
Priklad 2 : Nech $f(x) = -[-(x-3)^2]$ pre každé $x$.

Ukážte, že číslo 1 je limita funkcie v bode 3.



Priklad 3 : Nech $f(x) = \frac{1}{x}$, pre $x \in R\text{-}\{0\}$.

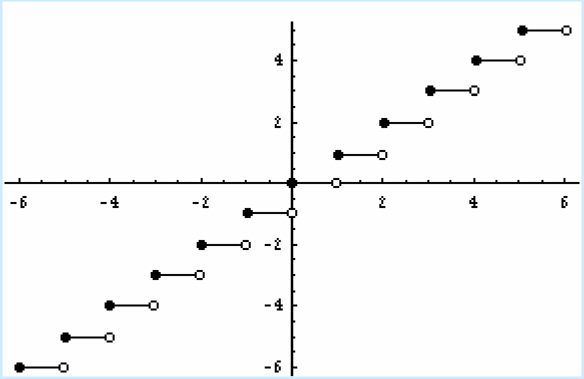
Dokážte, že $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ = neexistuje



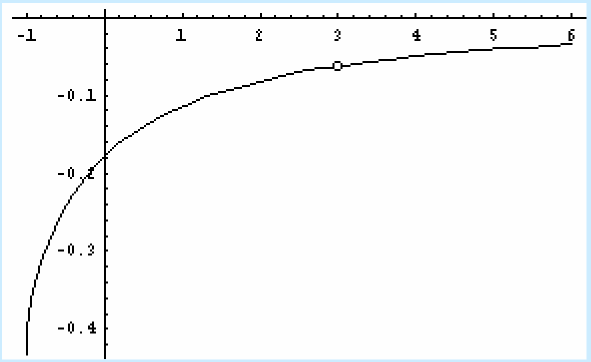

**Veta 16.1 :**

Číslo $k$ je limitou funkcie $f$ v bode $a$ vtedy a len vtedy, keď je limitou zľava a zároveň sprava funkcie $f$ v bode $a$ .

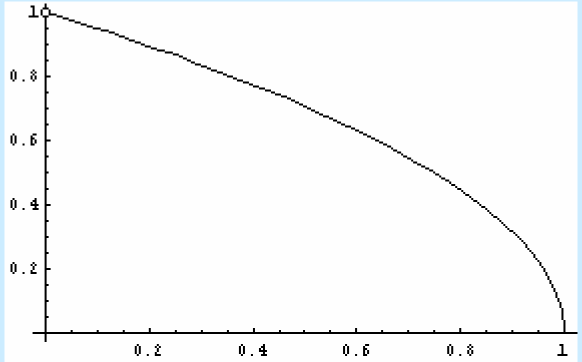
Priklad 4 : Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 1} [x]$



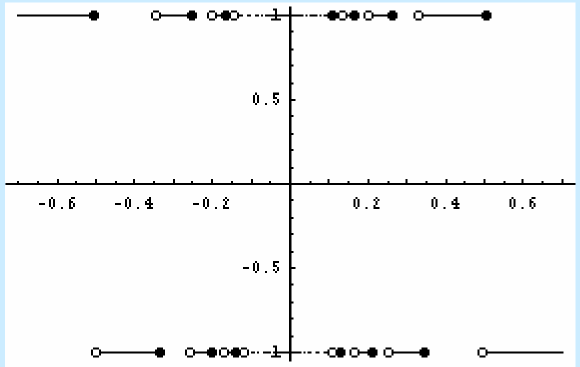

Priklad 5 : Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$



Priklad 6 : Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 0-} x\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}}$




Priklad 7 : Vypočítajte $\lim\limits_{x \to 0+} (-1)^{[1/x]}$




## Limity v nekonečne

### Veta 15.2 :

Číslo $k$ je limitou funkcie $f$ zľava v bode $\infty$ ak a iba ak, pre každé okolie V bodu $k$, existuje také číslo $c < a$, že $\{ f(x): x \in (c, a\rangle \} \subset V$.

Číslo $k$ je limitou funkcie $f$ sprava v bode $a$ ak a iba ak, pre každé okolie V bodu $k$, existuje číslo $d > a$, také, že $\{ f(x): x \in (a, d\rangle \} \subset V$.

**Definícia 15.2** :

Hovoríme, že číslo $k$ je limitou funkcie $f$ v bode $+\infty$ ak pre každé okolie V hodnoty $k$, existuje také $c$, že $\{ f(x): x \in (c, \infty\rangle \} \subset V$

Píšeme $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = k$.

Hovoríme, že číslo $k$ je limitou funkcie $f$ v bode $-\infty$ ak pre každé okolie V hodnoty $k$, existuje také $d$, že $\{ f(x): x \in (-\infty, d\rangle \} \subset V$

Píšeme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$.

Priklad 8 : Nech $f(x) = x^{-1}$ pre každé $x \neq 0$. Ukážeme $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

**Veta 15.3 :**

Nech $f$ je funkcia a $k$ je číslo.

Potom:

1. $k = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ vtedy a len vtedy, keď $k = \lim\limits_{x \to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $k = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ vtedy a len vtedy, keď $k = \lim\limits_{x \to 0-} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Priklad 9 : Vypočítajte $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{2x-3}$

## Limity a ohraničenie

### Veta 15.4 :

Ak funkcia $f$ má limitu sprava v bode $a$, potom existuje interval $(a, c)$, $a < c$, v ktorom funkcia $f$ je ohraničená.
Ak funkcia $f$ má limitu zľava v bode $b$, potom existuje interval $(d, b)$, $d < b$, v ktorom funkcia $f$ je ohraničená.

### Veta 15.5 :

Ak funkcia $f$ je ohraničená zdola na intervale $(a, b)$, potom limita funkcie $f$ sprava v bode $a$ existuje a $\lim_{x\to a+} f(x) = \inf \{ f(x) : x \in (a, b)\}$

Ak funkcia $f$ je ohraničená zhora na intervale $(a, b)$, potom limita funkcie $f$ zľava v bode $b$ existuje a $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup \{f(x) : x \in (a, b)\}$

### Veta 15.6 :

Nech $-\infty \leq a < b \leq \infty$ a nech $f$ je funkcia nerastúca v intervale $(a, b)$. Ak funkcia $f$ je ohraničená zhora na $(a, b)$, potom limita funkcie $f$ sprava v bode $a$ existuje a $\lim_{x\to a+} f(x) = \sup \{f(x) : x \in (a, b)\}$

Ak funkcia $f$ je ohraničená zdola na intervale $(a, b)$, potom limita funkcie $f$ zľava v bode $b$ existuje a $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf \{f(x) : x \in (a, b)\}$

## Operácie s limitami

### Veta 15.7 :

Označenie lim použijeme namiesto ( $\lim\limits_{x\to a}$ , $\lim\limits_{x\to a-}$ , $\lim\limits_{x\to a+}$ , $\lim\limits_{x\to\infty}$ , $\lim\limits_{x\to-\infty}$ )

Ak lim $f(x) = k$ a lim $g(x) = l$, potom lim $(f(x) + g(x)) = k + l$
lim $(f(x) - g(x)) = k - l$
lim $(f(x) \,.\, g(x)) = k \,.\, l$

Ak $k \neq 0$, potom $\lim \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{l}{k}$.

### Veta 15.8 :

Ak $g$ je funkcia spojitá v bode $b$ a ak lim $f(x) = b$ potom lim $g(f(x)) = g(b)$.

### Veta 15.9 :

Ak $\lim\limits_{y\to b} g(y) = k$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $f(x) \neq b$, pre každé $x \neq a$ v okolí bodu $a$,
potom $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = k$

Priklad 10 : Dokážte : $k = \lim\limits_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow k = \lim\limits_{x\to 0} f(a+x)$