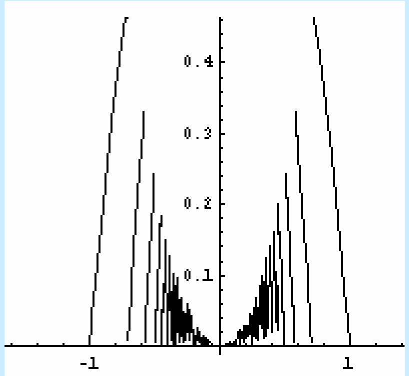
14. Spojitosť

Priklad 1 : Nech $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ 1-x^2\left[\dfrac{1}{x^2}\right] & x\neq 0 \end{cases}$

Dokážte, že funkcia je spojitá v bode 0



Veta 14.1 :

a) Funkcia f je zľava (resp. sprava) spojitá v bode a, ak a iba ak pre každé okolie V hodnoty $f(a)$ existuje ľavé (resp. pravé) okolie U bodu a také, že $\{f(x) : x\in \text{U}\}\subset \text{V}$

b) Funkcia f je spojitá v bode a ak a iba ak pre každé okolie V hodnoty $f(a)$ existuje okolie U bodu a také že $\{f(x) : x\in \text{U}\}\subset \text{V}$

Veta 14.2 :

Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď pre každé kladné číslo ε existuje okolie U bodu a také, že platia nerovnosti $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(\mathrm{a}) + \varepsilon$ pre $\forall\ x \in \mathrm{U}$.

Funkcia f je zľava (resp. sprava) spojitá v bode a, práve vtedy keď pre každé kladné číslo ε existuje ľavé (resp. pravé) okolie bodu a také, že platia nerovnosti $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) +\varepsilon$, pre každé $x \in \mathrm{U}$

Veta 14.3 :

Funkcia f je spojitá v bode a práve vtedy, keď pre $\forall\ \varepsilon >0$ existuje číslo $\delta>0$, také že pre ľubovoľné x, $a -\delta < x < a+\delta$ platia nerovnosti $f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a) +\varepsilon$.

Funkcie f je zľava(resp. sprava) spojitá v bode a práve vtedy , keď pre $\forall\ \varepsilon >0$ existuje číslo $\delta >0$, také že pre ľubovoľné x, $a-\delta < x \leq a$ (resp. $a \leq x < a+\delta$) platia nerovnosti $f(a) -\varepsilon < f(x) < f(a) +\varepsilon$

Veta 14.4 :

Funkcia f je spojitá v bode a ak a iba ak $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall\ x\in\ |x-a|<\delta)$ $(|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

Vlastnosť spojitých funkcií na okolí bodu

Veta 14.5 :

Nech funkcia f je spojitá (resp. zľava, sprava) v bode a a nech k je číslo .
Ak $k < f(a)$, potom existuje okolie (resp. ľavé, pravé) U bodu a také že $k< f(x)$ pre každé $x\in$ U.
Ak $f(a) <$ k , potom existuje okolie (resp. ľavé, pravé) U bodu a také, že $f(x) < k$, pre každé $x \in$ U.

Veta 14.6 :

Nech funkcia f je spojitá (resp. zľava, sprava) v bode a a nech k je číslo. Ak v každom okolí (resp. ľavom, pravom) bodu a nájdeme bod z, taký že $f(z) \leq k$, potom $k \geq f(a)$
Ak v každom okolí (resp. ľavom, pravom) bodu a existuje bod z taký, že $k \leq f(z)$ potom tiež $k \leq f(a)$

Veta 14.7 :

Nech funkcia f bude spojitá (resp. zľava, sprava) v bode a a nech k je číslo také, že $f(a) \neq k$. Potom existuje okolie (resp. ľavé, pravé.) U bodu a také,že $f(x) \neq k$ pre $\forall$ x okolia U.

Vlastnosti spojitých funkcií

Veta 14.8 (Spojitosť a ohraničenosť) :

Ak funkcia f je spojitá (resp. zľava, sprava spojitá) v bode a potom existuje okolie (resp. ľavé, pravé), v ktorom je funkcia f ohraničená.

Veta 14.9 (Spojitosť zloženej funkcie) :

Nech funkcia f je spojitá v bode a a funkcia g v bode $b = f(a)$. Potom zložená funkcia $h = g \circ f$ je spojitá v bode a.

Veta 14.10 :

Ak f je funkcia zľava spojitá alebo sprava spojitá v bode a a ak g je funkcia spojitá v bode $b=f(a)$ potom zložená funkcia $h= g\circ f$ je zľava spojitá alebo sprava spojitá v bode a.

Veta 14.11 :

Ak funkcia f je spojitá (zľava spojitá, sprava spojitá) v bode a a c je číslo, potom funkcia $c.f$ je tiež spojitá (zľava spojitá, resp. sprava spojitá) v bode a.

Veta 14.12 :

Ak funkcie f a g sú spojité (zľava spojité, sprava spojité) v bode a, potom tiež funkcia $f + g$.

Veta 14.13 :

Nech n je prirodzené číslo a pre každé j=1,2,3, ... n položme c_j budú čísla a f_j spojité funkcie (resp. zľava, sprava spojité) v bode a. Potom funkcia $f = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$ je tiež spojitá (resp. zľava , sprava spojitá) v bode a.

Veta 14.14 :

Ak funkcia f a g sú spojité (resp. zľava, sprava spojité) v bode a, potom tiež aj funkcia $f.g$.

Veta 14.15 :

Ak funkcia f a g sú spojité (resp. zľava spojité, sprava spojité) v bode a, a ak $f(a) \neq 0$, potom funkcia g/f je tiež spojitá (resp. zľava, sprava spojitá) v bode a.

Priklad 2 : Dokážte, že existuje číslo $x>1$ také, že $3x^{24} + x^{15} < 7/x^{12} - 2[x]$ platí táto nerovnosť.

Veta 14.16 (Princíp spojitého rozšírenia) **:**

Nech f a g sú spojité funkcie (resp. zľava, sprava spojité) v bode a. Ak v každom okolí (resp. vľavom, pravom okolí) bodu a existuje bod $x \neq a$ taký, že $f(x) = g(x)$, potom $f(a) = g(a)$.

Ak $f(x) = g(x)$ pre každé $x \neq a$ v nejakom okolí (resp. vľavom okolí, pravom okolí) bodu a potom tiež $f(a) = g(a)$.

Priklad 3 : Čomu sa rovná $f(3)$ ak vieme, že funkcia je v bode 3 spojitá a pre každé $x \neq -3$, $x \neq 3$ je $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 9} - \dfrac{1}{x-3}$?