13. Spojitosť monotónnych funkcií

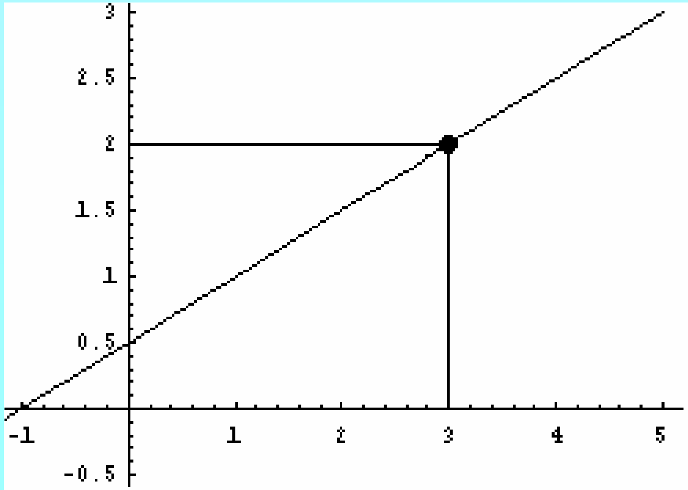
Spojité procesy :

- *malá zmena množstva soli v pohári vody má za následok malú zmenu chuti vody*
- *malá zmena času v pečení koláča má za následok malú zmenu farby koláča*
- *malá dávka liekov má malý vplyv na stav pacienta*
- *pri meraniach malá zmena pri strane kocky má za následok malú zmenu objemu kocky.*

Nespojité procesy :

- *pri šoférovaní alebo iných strojoch, malá zmena v stave stroja má za následok podstatnú zmenu.*
- *pri nafukovaní balónu, keď sme pri takzvanej kritickej hodnote jeho objemu aj malá zmena má za následok jeho prasknutie.*
- *varenie vajíčka*

Priklad 1 : Zoberme si funkciu $x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)$

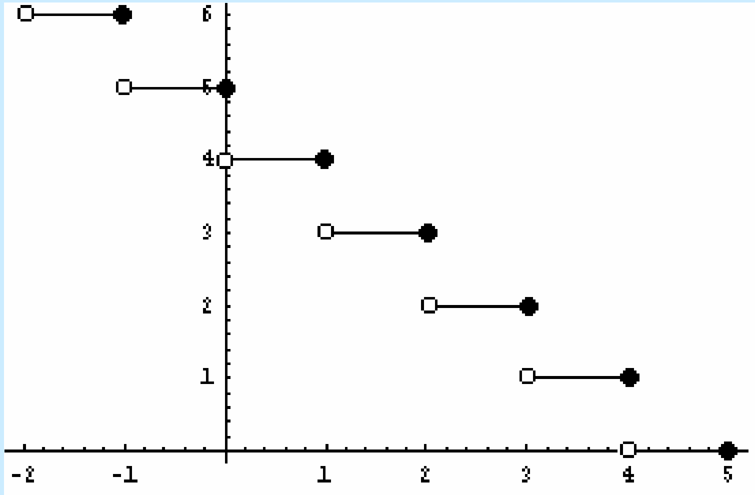


Priklad 2 : Zoberme si ľubovoľné reálne číslo a.

[a] - celá časť označuje najbližšie celé číslo nie väčšie ako a.

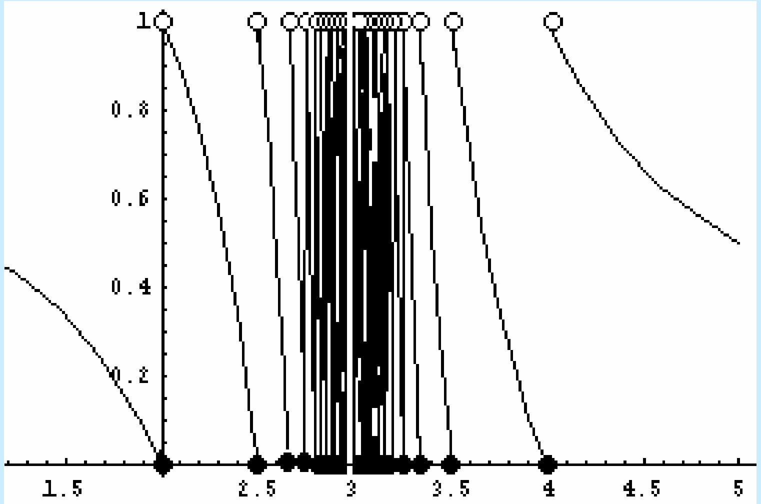
[a] = a, a je celé číslo , pre ktoré $n \leq a < n+1$

$f(x) = [\,5 - x\,]$ pre každé $x \in (-\infty, \infty)$



Priklad 3 : Zoberme si funkciu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} - \left[\dfrac{1}{x-3}\right], & \text{pre } x \neq 3 \\ 0 & \text{pre } x = 3 \end{cases}$$



Definícia 13.1 :

Každý otvorený interval obsahujúci číslo $a \in$ R sa nazýva okolie bodu a.

Ľavé okolie bodu a je ľubovoľný polouzavretý interval $(c,a\rangle$ alebo $(-\infty,a\rangle$.

Pravé okolie bodu a je ľubovoľný polouzavretý interval $\langle a,d)$ alebo $\langle a,\infty)$.

Symetrické okolie bodu a s polomerom $\rho > 0$ (ρ je okolie bodu a) je interval $(a-\rho, a+\rho)$

Veta 13.1 :

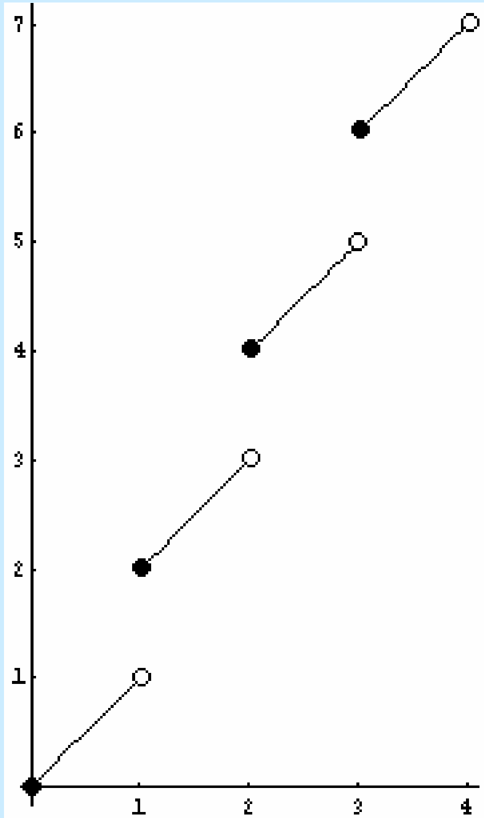
Nech U_1 a U_2 sú dve okolia (ľavé, pravé) bodu a . Potom $U_1 \cap U_2$ je okolie bodu a (ľavé, pravé)

Definícia 13.2 :

Funkciu f nazývame neklesajúca v ľavom okolí W bodu a, ak pre každé x_1, $x_2 \in$ W, $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) \leq f(x_2)$. $f(a)$ je horné ohraničenie množiny $\{ f(x)$: $x \in W \wedge x < a \}$?Ak $f(a)$ je suprémum tejto množiny, hovoríme že funkcia f je zľava spojitá v bode a.

Priklad 4 : Dokážte, že $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$ je spojitá v bode $a = 3$

Priklad 5 : Vezmime si $f(x) = x + [x]$,
pre každé $x \in (-\infty, \infty)$ a zoberme si $a=3$



Definícia 13.3 :

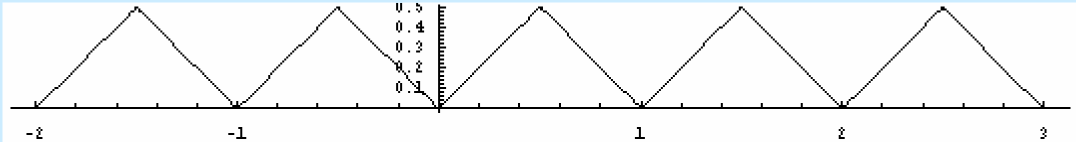
Funkciu f nazývame nerastúca v ľavom okolí W bodu a, ak pre každé $x_1, x_2 \in W$, $x_1 < x_2$, potom $f(x_1) \geq f(x_2)$. $f(a)$ je dolné ohraničenie množiny $\{ f(x): x \in W \wedge x < a \}$. Ak $f(a)$ je suprémum tejto množiny, hovoríme že funkcia f je zľava spojitá v bode a.

Definícia 13.4 :

Neklesajúca funkcia f v pravom okolí W bodu a je spojitá vpravo v bode a akk $f(a) = \inf \{ f(x): x \in W \wedge a < x \}$
Nerastúca funkcia f v pravom okolí W bodu a je spojitá vpravo v bode a akk $f(a) = \sup \{ f(x): x \in W \wedge a < x \}$

Priklad 6 : Nech $\phi(t) = \min\{|t-n|, |t-(n+1)| : t \in \langle n, n+1\rangle, n \in Z\}$

teda $\phi(t) = \dfrac{1}{2} - \left| t - \dfrac{2n+1}{2} \right|$, pre $t \in \langle n, n+1\rangle$



Zoberme si funkciu: $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x\phi\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}$

Dá sa ľahko ukázať,

pre $x \in (0,1\rangle$ je funkcia

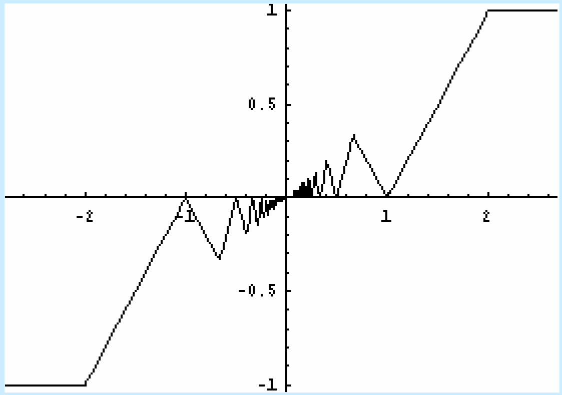
ak $x \in \left\langle \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{2}{2n+1} \right\rangle$ je funkcia $f(x) = (n+1)x - 1$ rastúca a

ak $x \in \left\langle \dfrac{2}{2n+1}, \dfrac{1}{n} \right\rangle$ je funkcia $f(x) = 1 - nx$

klesajúca $\quad n \in N$

pre $x \in (1,2\rangle$ je funkcia $f(x) = x - 1$

pre $x \in (2,\infty\rangle$ je funkcia $f(x) = 1$



Definícia 13.5 :

Funkcia f sa nazýva zľava spojitá (resp. sprava spojitá) v bode a ak existujú funkcie h,g monotónne v ľavom(resp. v pravom) okolí bodu a a tieto funkcie sú zľava (sprava) spojité v bode a platí $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ a tiež $g(a) = f(a) = h(a)$.

Veta 13.2 :

Nech f , g, h sú také funkcie , že $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pre každé x v okolí (resp. v ľavom, pravom okolí) bodu a a $g(a) = f(a) = h(a)$.
Ak funkcie g a h sú spojité (resp. zľava, sprava) v bode a , potom funkcia f je tiež spojitá v bode a.