KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU, PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Semestrálna práca z predmetu HISTÓRIA MATEMATIKY

GEORG CANTOR A JEHO DIAGONÁLNA METÓDA

Ročník: 4
Semester: 7
Kombinácia: MAT - INF

Lubo VRANIAK

GEORG CANTOR A JEHO DIAGONÁLNA METÓDA

Georg Ferdinand Cantor sa narodil 3. marca 1845 v Petrohrade ako syn dánskeho obchodníka a ruskej hudobníčky. V roku 1856 sa rodina presťahovala do Nemecka kde mladý George pokračoval v štúdiách, ktoré ukončil doktorátom na Univerzite v Berlíne v roku 1867.

Je známy ako tvorca modernej **teórie množín.** Medzi matematikmi je známy rozšírením teórie množín o koncept transifinitných čísel, vrátane triedy kardinálnych a ordinálnych čísel. Cantor je takisto známy prácou na jedinečnej reprezentácii funkcií pomocou trigonometrických radov (zovšeobecnené verzia Fourierových radov).

Rozpoznal, že nekonečné množiny majú rôzne veľkosti, rozlišoval medzi spočítateľnými a nespočítateľnými množinami a dokázal, že množina všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$ je spočítateľná, kým množina všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$ je nespočítateľná, a teda v istom zmysle väčšia. Pôvodný dôkaz, ktorý vymyslel v decembri 1873 a zverejnil začiatkom roka 1874, bol postavený na trocha komplikovanejšom dôkaze sporom. Neskôr v roku 1891 použil v dôkaze známu **Cantorovu diagonálnu metódu.** V neskorších rokoch sa márne pokúšal dokázať hypotézu kontinua. Do roku 1897 objavil niekoľko paradoxov v elementárnej teórii množín. Prvý krát použil symbol označujúci všetky reálne čísla.

Počas druhej polovice svojho života trpel záchvatmi depresie, ktoré vážne ovplyvnili jeho schopnosti pracovať. Začal vydávať práce o literatúre, kde sa pokúšal dokázať, že Francis Bacon bol skutočným autorom Shakespearových diel. Písal aj náboženské práce, v ktorých spracoval svoj koncept absolútneho nekonečna, ktoré prirovnal k Bohu. Počas prvej svetovej vojny prišiel o všetko a po dlhotrvajúcich záchvatoch depresie zomrel v liečebni pre duševne chorých v Hale v Nemecku 6. januára 1918.

CANTOROVA DIAGONÁLNA METÓDA

VETA: Množina všetkých reálnych čísel je nespočítateľná

DOKAZ: Urobíme ho sporom. Sleduje skutočne pôvodný Cantorov dôkaz. Predpokladáme, že množina $\mathbb{R}$ je spočítateľná. Potom jaj interval (0,1) je spočítateľná množina a možno ho zoradiť do postupnosti.

$$\mathbf{(0,1) = \{a_n;\ n\ \varepsilon\ N,\ n > 0\}}$$

Každé číslo a_n má dekadický zápis

$$a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \, . \, 10^{-k}$$

Ak číslo a_n má dva rôzne dekadické zápisy, tak vyberiem nekonečný zápis, t. j. taký, že pre nekonečno mnoho k sa $a_{nk} \neq 0$. Čísla a_n, n ε N, n > 0 zoradiť do tabuľky (obr.)

Teraz použijeme **metódu diagonály**. Zostrojíme číslo b = $0,b_1b_2b_3 \ldots b_n$ takto. Ak $a_{kk} = 1$ položíme $b_k = 9$. Ak $a_{kk} \neq 1$, položíme $b_k = 1$. Potom číslo b patrí do intervalu (0,1), teda existuje n také, že $a_n = b$. Špeciálne, musí byť $a_{nn} = b_n$. Ale číslo b bolo zostrojené tak, aby pre každé k bolo $b_k \neq a_{kk}$, teda aj $a_{nn} \neq b_n$. To je hľadaný spor.

$A_0 = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	.....	a_{0n}	.....
$A_1 = 0$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	.....	a_{1n}	.....
.	.		.		.	
.	.			.	.	
.	.			.	.	
$a_n = 0$	a_{n0}	a_{n1}	a_{n2}	.....	a_{nn}	.....