Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diferenciálny počet očami G. W. Leibnitza

História matematiky

Mária Šuvadová
4. roč. MAT – INF

Niečo na úvod

V rôznych knihách matematiky sa dočítame o Newton-Leibnitzovej formule na výpočet určitého integrálu funkcie. Na začiatku som si myslela, že títo dvaja boli bratia, prípadne veľmi dobrí kamaráti. Pravda je však od mojej domienky veľmi ďaleko. Asi jediné (ak neberieme do úvahy matematiku všeobecne), čo ich spája je práve integrál a jeho výpočet. V tejto práci sa pokúsim ukázať, akým spôsobom prišiel Leibniz na daný výpočet. Pre Leibnitza som sa rozhodla preto, lebo jeho spôsob je veľmi názorný a myslím, že aj pre laika veľmi pochopiteľný.

Gottfried Wilhelm Leibnitz

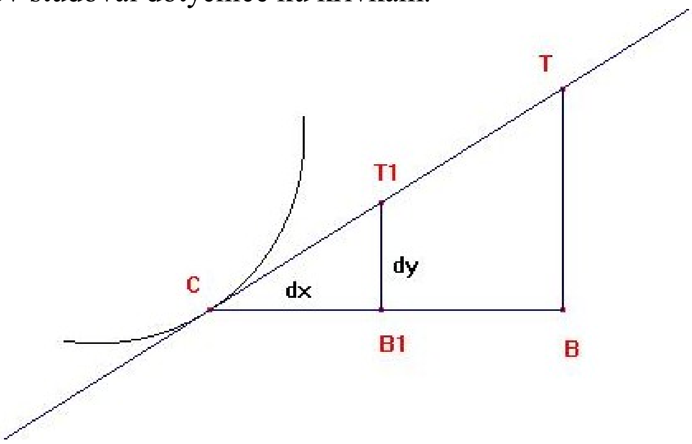
Narodený: 1. júla 1646 v Lipsku
Zomrel: 14. novembra 1716 v Hannoveri
Nemecky filozof a matematik
Venoval sa: matematike, fyzike, logike, konštrukcii strojov, biológii, histórii, jazykovede, filozofii,...
Veľmi citlivo chápal súlad medzi obsahom a formou pre matematický zápis a symboliku. Zaviedol napr. symbol pre delenie :, pre násobenie ., pre diferenciál dx, pre integrál a celý rad ďalších.

Objavil nezávisle s I. Newton [1665–1666], diferenciálny a integrálny počet, ktorý však publikoval ako prvý.
Newtonov prístup mal fyzikálny charakter a deriváciu chápal predovšetkým ako rýchlosť. Leibnitzov prístup mal geometrickú povahu a deriváciu chápal ako smernicu dotyčnice ku grafu v danom bode.

Posolstvo rozumu

Diferenciálny a integrálny počet sa zaoberá štúdiom vlastností reálnych funkcií, ich derivácií a integrálov. Tvorí jadro matematickej analýzy a základ ostatných disciplín matematickej analýzy.

V roku 1675, v Londýne objavil Leibnitz značné medzery vo svojom matematickom vzdelaní. Treba poznamenať, že nekonečne malé veličiny, ktoré Newton označoval znakom o, Leibnitz označoval dx (diferenciál).
Pomocou diferenciálov študoval dotyčnice ku krivkám.



Dotyčnica je určená trojuholníkom BTC ale aj miniatúrnym trojuholníkom B_1T_1C, s nekonečne malými stranami $dx = B_1C_1$, $dy = B_1T_1$.

Z podobnosti týchto trojuholníkov vyplýva

$$\frac{BT}{BC} = \frac{dy}{dx}$$

takže napríklad pre parabolu $y=x^2$ platí

$$\frac{BT}{BC} = 2x$$

a pre parabolu $y=x^3$

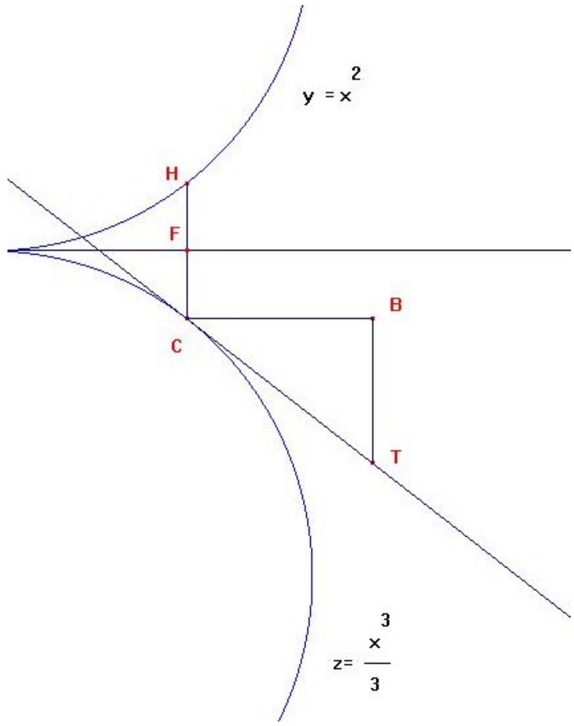
$$\frac{BT}{BC} = 3x^2$$

Leibnitz si od tohto trojuholníka veľa sľuboval. Chcel pomocou neho porovnať krivky $y=x^3$ a $y=x^2$?

Na toto všetko prišiel v jeden večer, ale keďže musel ísť s majstrom na divadelné predstavenie, musel skončiť svoje bádanie.

Po návrate však pokračoval ďalej, a opäť sa dal kresliť paraboly, teraz však na jeden obrázok: hore $y=x^2$ a dole $y=x^3/3$.
charakteristický trojuholník BTC.
Leibnitz už dávno vedel, že potom

$$x^2 = HF = \frac{BT}{BC}$$



Lenže

$$\frac{BT}{BC} = \frac{dy}{dx}$$

Preto

$$x^2 = \frac{dy}{dx}$$

$$x^2dx = dy$$

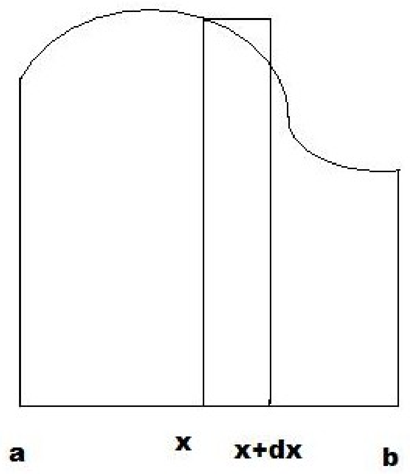
$$\int x^2dx = \int dy = z$$

takže obsah „ trojuholníka“ AFH je $FC = \dfrac{AF^3}{3}$.

Taký jednoduchý dôkaz kvadratúry paraboly skoro Leibnitzovi vyrazil dych. Jasný analytický úsudok a mierna trpezlivá povaha ho však uchránili pred unáhlenými závermi.

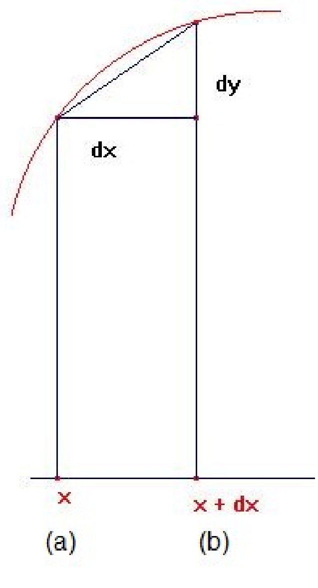
Pozrime sa z toho hľadiska na základnú úlohu integrálneho počtu, na kvadratúru, t. j. výpočet obsahu množiny určenej grafom funkcie f a intervalom <a,b>.
Leibnitz postupoval takto: Vzal nekonečne malý úsek na osi x dĺžky dx. Potom obsah nekonečne tenkého obdĺžnika so šírkou dx a s dĺžkou f(x) je

$$f(x)dx$$



Zostáva sčítať nekonečne veľa takýchto nekonečne malých veličín. Tento súčet sa nazýva integrál. Od Leibnitza pochádza označenie ∫ .
Teda obsah tejto množiny je

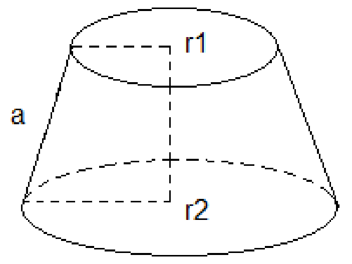
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



Leibnitz vedel takýmto spôsobom vypočítať aj miery iných geometrických útvarov, napr. rotačného telesa.

Obsah plášťa zrezaného kužeľa (bez základní) je

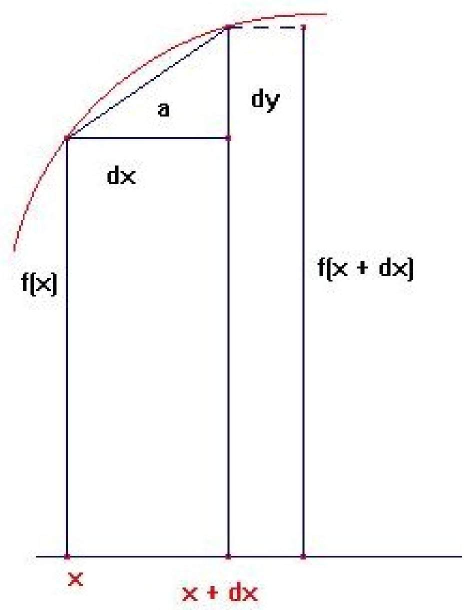
$$\pi(r_1 + r_2)a$$



V našom (Leibnitzovom) prípade

$$v = dx,\ (r_1 - r_2) = f(x + dx) - f(x) = dy, \text{ teda}$$

$$a = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\, dx$$



Odvodenie celkového obsahu plochy už nechám na Vás.

...

A čo dodať na záver, azda len myšlienku Leibnitza, ktorou odovzdával výsledky svojich prác:

Usiloval som sa písať tak, aby študujúci mohol vždy vidieť vnútorný základ študovaného predmetu, aby mohol objaviť zdroj objavu a teda do všetkého vniknúť tak, ako keby to bol vymyslel sám.

Literatúra:

Štefan Znám a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*. ALFA: 1986.

RNDr. Rudolf Blaško: *MATEMATICKÁ ANALÝZA I*, 2005.

Internet.