Teória matíc

Andrej Štefaničiak

Teória matíc je matematická disciplína, ktorá skúma matice. Medzi teóriou matíc a teóriou grafov jestvuje úzka súvislosť. Niektoré vlastnosti matíc môžeme študovať pomocou grafov, teda vlastne geometrickou cestou. Ak je prvkov mnoho, stáva sa znázornenie pomocou grafov neprehľadným, alebo je dokonca nemožné. Potom je lepšie použiť namiesto grafu zápis pomocou matice. Matica, ktorá má toľko riadkov a toľko stĺpcov ako graf uzlov, sa nazýva incidenčnou maticou grafu.

Matica

Matica je určitá množina čísel alebo iných matematických objektov (tzv. prvkov matice) usporiadaných do pravidelných riadkov a stĺpcov (prípadne aj ich viacrozmerných ekvivalentov) a vyznačujúcich sa tým, že každý výpočtový úkon vykonávaný s maticou sa týka každého prvku tvoriaceho maticu.

Najčastejšie sa možno stretnúť s dvojrozmernou maticou. Ak treba zdôrazniť, že má *m* riadkov a *n* stĺpcov, hovorí sa o matici typu *m krát n*. Ak treba zdôrazniť, že objekty v tejto tabuľke pochádzajú z množiny *A* hovorí sa o matici nad množinou *A*. Príkladom matice typu 3 krát 4 nad množinou celých čísel môže byť

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

Matice sú obzvlášť dôležité v lineárnej algebre kde reprezentujú lineárne zobrazenia a slúžia k efektívnemu zápisu lineárnych rovníc. Pomocou matíc nad množinou {0,1} sa reprezentujú konečné binárne relácie.

Matica typu $m \times n$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Kde a_{11}...a_{mn} sú prvkami matice, m, n sú riadkovým a stĺpcovým indexom prvkov.

Operácie s maticami

Ak prvky dvoch matíc pochádzajú z vhodnej algebraickej štruktúry a ak sú splnené obmedzujúce podmienky týkajúce sa typu matíc, možno s maticami vykonávať rôzne operácie. Pre operáciu s maticami však neplatia všetky pravidlá platné pri počítaní s číslami, preto sa treba riadiť definíciami, ktoré maticové operácie určujú. Napríklad nie jedno, v akom poradí sa násobia matice.

Sčítavanie matíc

Sčítanie matíc môže prebiehať len vtedy, ak tie dve matice majú rovnaký rozmer. Prebieha to tak, že sa zoberú čísla z rovnakej pozície a sčítajú sa. Napríklad:

$$\begin{pmatrix} -2 & 9 & 11 \\ 5 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 & 9-7 & 11+0 \\ 5+0 & 1+8 & 3+1 \\ 6+7 & 8+3 & -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 11 \\ 5 & 9 & 4 \\ 13 & 11 & -8 \end{pmatrix}$$

Skalárne násobenie

Zobratím matice *A* a číslom *c*, je skalárne násobenie *cA*. Vypočíta sa to tak, že každý prvok v matici *A* vynásobím číslom *c*. Napríklad:

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 11 \\ 5 & 9 & 4 \\ 13 & 11 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -33 \\ -15 & -27 & -12 \\ -39 & -33 & 24 \end{pmatrix}$$

Sčítanie a skalárne násobenie nemenia rozmer matíc.

Násobenie matíc

Násobenie môže pracovať len vtedy, ak je počet prvkov v riadku ľavej matice rovnaký ako počet prvkov v stĺpci pravej matice. Ak *A* je *m* krát *n* matica a *B* je *n* krát *m* matica, tak ich maticový produkt *AB* má rozmery *m* krát *n* (*m* stĺpce, *n* riadky). Výsledná hodnota na pozícií [i,j] je: (AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2] B[2,j] + … + A[i,n]B[n,j] pre každé *i* a *j*.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1.5+1.(-1)+2.7 & -1.0+1.1+2.4 & -1.3+1.8+2.(-9) & -1.12+1.2+2.(-4) \\ 4.5+3.(-1)+0.7 & 4.0+3.1+0.4 & 4.3+3.8+0.(-9) & 4.12+3.2+0.(-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 9 & -13 & -18 \\ -17 & 3 & 36 & 54 \end{pmatrix}$$

Redukovaná trojuholníková matica

- vedúci prvok každého riadku je 1
- každý stĺpec obsahujúci vedúci prvok niektorého riadku má ostatné prvky nulové

Každá matica je ekvivalentná s nejakou redukovanou trojuholníkovou maticou

príklady:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$ - nie je trojuholníková

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$ - nie je trojuholníková

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ - nie je trojuholníková

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ - nie je trojuholníková

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$ - je trojuholníková

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - je trojuholníková

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - je redukovaná trojuholníková

Ekvivalentné úpravy matíc:

- výmena poradia riadkov (prvý a druhý) –

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & 12 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow$$

- vynásobenie druhého riadku nenulovým číslom 3 -

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix} /.3 \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -3 & 3 & 24 & 6 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

- pripočítanie 5-násobku druhého riadku k prvému riadku

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix} /.5 \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & 43 & 22 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 7 & 4 & -9 & -4 \end{pmatrix}$$

$-5 \quad 5 \quad 40 \quad 10$ - 5-násobok druhého riadku

- vynechania riadku (nahradenie nulovým), ktorý je lineárnou kombináciou iných riadkov

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & 16 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 12 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tretí riadok je lineárnou kombináciou iných riadkov (je 2-násobkom druhého riadku)

Praktické príklady

Hľadanie trojuholníkovej matice, ktorá je s danou maticou ekvivalentná:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} /.(-1)\,/.(-2)\,/.(-3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} -2 & -1 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & -4 & -4 \\ -6 & -3 & -6 & -6 \\ 6 & 2 & 14 & 6 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} /.(-3)\,/.(-2) \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & -3 \\ 0 & 0 & -15 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} /.(-15) \\ /.23 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -23 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -47 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 3 & -24 & 0 \\ 0 & 2 & -16 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 345 & 45 \\ 0 & 0 & -345 & -92 \end{matrix}$$

1.krok – výmena prvých dvoch riadkov
2.krok – (-1)-násobok prvého riadku (ktorý je napísaný ako prvý pod maticou) sa pripočíta k druhému riadku, (-2)-násobok prvého riadku sa pripočíta k tretiemu riadku, (-3)-násobok

prvého riadku sa pripočíta k dvojnásobku tretieho riadku, (jednotlivé násobky riadkov sú napísané ako pomocné riadky pod maticou)(6 je najmenší spoločný násobok čísel 2 a 3).
3. krok – výmena druhého a štvrtého riadku
4. krok – (-3)-násobok druhého riadku sa pripočíta k tretiemu riadku, (-2)-násobok druhého riadku sa pripočíta k štvrtému riadku
5.krok – (-15)-násobok tretieho riadku sa pripočíta k 23-násobku štvrtého riadku

Po ekvivalentných úpravách vyšla trojuholníková matica, ktorá má štyri nenulové riadky, a teda jej hodnosť je 4. Keďže táto matica je ekvivalentná s maticou **A** tak aj jej hodnosť je 4 (h(**A**)=4). Matica **A** je regulárna, lebo jej hodnosť sa rovná stupňu matice.

Hľadanie inverznej matice

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 11\\ 3 & 2 & 9\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 11 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 9 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 9 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 11 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) /.(-3)\,/.(-2) \sim$$

$$\begin{array}{cccccc}-3 & -3 & -6 & 0 & 0 & -3\\ -2 & -2 & -4 & 0 & 0 & -2\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -3\\ 0 & -2 & 7 & 1 & 0 & -2\end{array}\right) /.(-2) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right) /.(-3)\,/.(-2) \sim$$

$$\begin{array}{cccccc}0 & 2 & -6 & 0 & -2 & 6\end{array} \qquad \begin{array}{cccccc}0 & 0 & -3 & -3 & 6 & -12\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 & -8\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -2 & 4 & -7\\ 0 & -1 & 0 & -3 & 7 & -15\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -5 & 11 & -22\\ 0 & -1 & 0 & -3 & 7 & -15\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right) /.(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -5 & 11 & -22\\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 & 15\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right) \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 11 & -22\\ 3 & -7 & 15\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

použité materiály:

- http://sk.wikipedia.org/wiki/Te%C3%B3ria_mat%C3%ADc
- http://www.fem.uniag.sk/km/MaticeM.doc