Lucia Špitálová

Logaritmy

Jedným z prelomových momentov v rozvoji funkčného myslenia bolo zavedenie *logaritmickej funkcie*. Okrem goniometrických funkcií je logaritmická funkcia ďalšou *transcendentnou funkciou*, ktorá bola zavedená pre uľahčenie astronomických výpočtov.

Objav logaritmov a zavedenie ich názvu patrí škótskemu matematikovi *Johnovi Napierovi* (1550 – 1617), ktorý v roku 1614 v diele "*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* " (*Popis podivuhodného kánonu logaritmov*) uverejnil prvé tabuľky logaritmov, aj keď treba poznamenať, že už pred ním zostavil tabuľky *antilogaritmov* švajčiarsky matematik *Joost Bűrgi*, ktoré vyšli až v roku 1620 v diele „*Arithmetische und geometrische Progress Tabulen*“. Pri zostavovaní tabuliek obaja využili vzťah medzi geometrickou postupnosťou, vytvorenou z postupných mocnín istého základu a aritmetickou postupnosťou ich exponentov, ktorý poznal už *Archimedes*, a ktorý bol v roku 1544 znovuobjavený a rozpracovaný *Michaelom Stifelom* v práci *Aritmetica integra*. Základom tohto vzťahu bola skutočnosť, že vynásobením dvoch členov geometrickej postupnosti exponent súčinu je rovný súčtu príslušných členov aritmetickej postupnosti.

Stifel vo svojej práci uviedol okrem pravidiel pre počítanie s mocninami s ľubovoľnými racionálnymi exponentami aj tabuľku pre celočíselné exponenty od čísla (-3) po 6.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	...

Z tabuľky je zrejmé, že súčtom v hornej aritmetickej postupnosti odpovedajú súčiny v dolnej geometrickej postupnosti: napr. 2 + 3 = 5 odpovedá súčinu 4 * 8 = 32. z dnešného hľadiska ide o evidentnú rovnosť $2^2 * 2^3 = 2^{2+3}$ .Z algoritmického pohľadu 16. storočia bolo zrejmé, že súčiny niektorých čísel vyskytujúcich sa v druhom riadku je možné zistiť tak, že sa sčítajú im odpovedajúce čísla v prvom riadku a zistí sa , čo tomuto súčtu odpovedá v druhom riadku. Nedostatkom tohto prístupu bolo, že „medzery“ medzi jednotlivými číslami v geometrickej postupnosti s koeficientom 2 boli priveľké a preto použiteľnosť tejto metódy pre násobenie ľubovoľných dvoch čísel bola malá.

Myšlienka však bola na svete a bolo potrebné iba uviesť ju do života. Bolo všeobecne známe, že ľubovoľné mocniny čísla „ blízkeho“ k číslu 1 sú čísla „ blízke“ k číslu 1. to však znamená, že „medzery“ medzi za sebou nasledujúcimi členmi tejto geometrickej postupnosti sú „malé“. Toto využil *John Napier* a zvolil koeficient $1 – 10^{-7} = 0,9999999$. Napier využil túto myšlienku s cieľom zjednodušiť trigonometrické výpočty. Tabuľky, ktoré zostrojil, umožňovali výpočet logaritmov trigonometrických veličín, ale samozrejme bolo ich možné použiť aj na výpočet logaritmov prirodzených čísel. Základným obsahom Napierovej práce boli *8 – miestne tabuľky logaritmov* trigonometrických funkcií pre hodnoty argumentu od 0˚ do 90˚.

Základom novej počtárskej techniky je tabuľka, ktorej Napier dal meno *logaritmická* (zo spojenia gréckych slov λογος – pomer, άριτμοζ - číslo). Tento názov vybral preto, aby zdôraznil, že *logaritmy* sú pomocné čísla merajúce pomer príslušných čísel. Jeho prístup k logaritmom bol kinematický. Základnú myšlienku v dnešnej symbolike možno opísať takto:

Po úsečke AB dĺžky *r* sa od bodu A k bodu B pohybuje bod X rovnomerne spomaleným pohybom. Rýchlosť bodu X je daná predpisom $v_x = x/r$, kde $x = |XB|$. Po ďalšej úsečke CD od bodu C k bodu D sa pohybuje bod Y rýchlosťou $v_y = 1$. obidva pohyby sa začínajú súčasne. Dĺžku $y = |CY|$ možno chápať ako funkciu dĺžky *x*. túto závislosť nazývame Napierovým logaritmom a označujeme ho *Nlog*. Teda $y = Nlogx$. Napier vypočítal tabuľky funkcie *Nlog* pre $r = 10^7$.

Napierove logaritmy nemali základ $e = \lim (1 + 1/n)^n$, ale základ *1/e*. V dnešnom označení môžeme *definíciu Napierových logaritmov* popísať systémom diferenciálnych rovníc s príslušnými podmienkami nasledovne:

$dx / dt = -x$; $x(0) = r$; $dy / dt = r$; $y(0) = 0$.

Z prvej diferenciálnej rovnice dostaneme $ln\ x = -t + ln\ r$ t. j. $t = ln\ (r/x)$ a s prihliadnutím na riešenie druhej diferenciálnej rovnice, ktorá má tvar $y = rt$, dostaneme $y = Nlog\ x = rln\ (r/x)$, teda pre $r = 10^7$ máme $Nlog\ x = 10^7\ (ln10^7 - ln\ x) = 161180957 - 10^7\ ln\ x$. V roku 1614 Napierovi ešte nebola známa *idea logaritmickej funkcie*; základom jeho úvah pri tvorbe jeho logaritmických tabuliek bola myšlienka : *logaritmus čísla x, ktoré je nanajvýš rovné* 10^7, *je nevyhnutný počer násobení čísla* 10^7 *číslom* $1 – 10^{-7}$, *aby sa získalo číslo x, t.j.* $Nlog\ x = Nlog\ [r\ (1 - 1/r)^k] = k$, *kde* $r = 10^7$. V druhej Napierovej práci o logaritmoch „ *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*“ , ktorá vyšla v roku 1619 je oneskorene uvedená aj konštukcia jeho tabuliek. V tomto diele je urobený dodatok, v ktorom sú vypočítané aj *prirodzené logaritmy*, ktoré sú v súčasnosti častokrát nazývané *Napierovými logaritmami*.

V tomto dodatku je badať snahu zaoberať sa limitou postupnosti $((1 + 1/n)^n)_{n=1}^{\infty}$ pre $n \to \infty$. V roku 1618 angličan *E. Wright* vypočítal a uverejnil *prirodzené logaritmy* niekoľkých čísel. Keď v roku 1620 anglický matematik *J Speidel* vydal tabuľky „nových“ logaritmov, ktoré obsahovali *prirodzené logaritmy čísel* od 1 po 1000, prirodzené logaritmy sa stali veľmi populárne. Fundamentálny význam prirodzených logaritmov, určených funkciou $y = e^x$, bol pochopený až vtedy, keď sa objavili niektoré dôležité otázky infinitezimálneho počtu.

Dostatočne úplné tabuľky prirodzených logaritmov sa objavili až v roku 1770. *Napierove tabuľky* podstatne zjednodušili výpočty, avšak ako poznamenával samotný autor k dokonalosti je ďaleko. Preto sa *John Napier* spolu s *Henrym Briggsom* začali zaoberať zostavením tabuliek *dekadických logaritmov*.

Základnou myšlienkou bolo porovnávanie dvoch postupností:

...	0,01	0,1	1	10	100	...
...	-2	-1	0	1	2	...

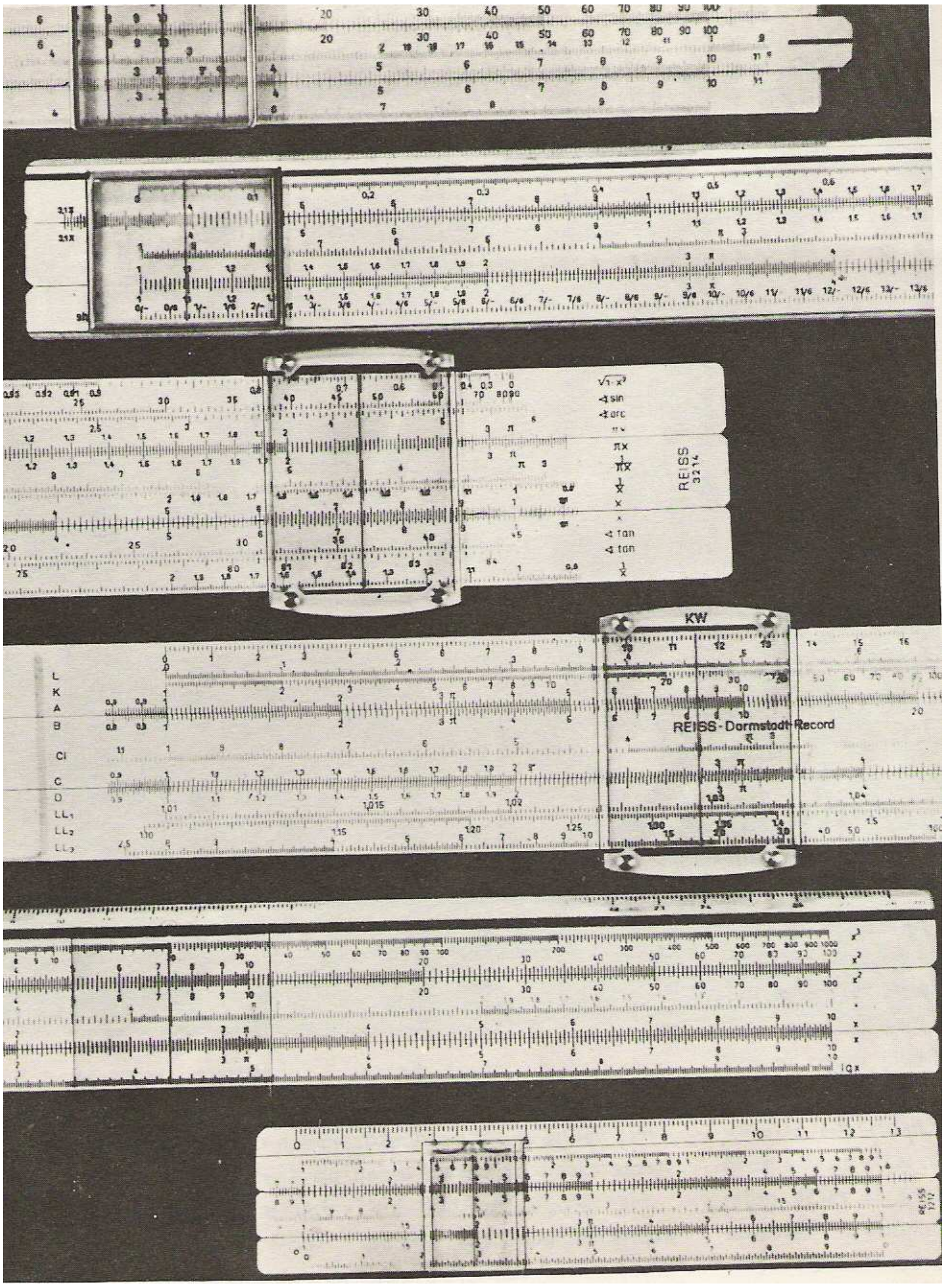
Henry Briggs vydal už v roku 1617 *8-miestne tabuľky dekadických logaritmov* čísel od 1 do 1000. o 7 rokov neskoršie, v roku 1624, *H. Briggs* vydal dielo „ *Arithmetica Logarithmetica*“, ktoré obsahovalo *dekadické logaritmy* čísel od 1 do 20000 a čísel od 50000 do 100000.

Briggs pri tvorbe svojich tabuliek vychádzal z toho, že ak z ľubovoľného kladného čísla, napríklad z čísla 10, opakovane určujeme druhé odmocniny, tak po „dostatočne“ veľkom počte takýchto iterácií ($m = 2^n$) dostaneme výsledok „dostatočne“ blízky k číslu 1. To znamená, že druhú odmocninu z takto získaného čísla môžeme zapísať v tvare: $\sqrt[2n+1]{10} = 1 + \alpha$ t.j. $\sqrt[2n]{10} = 1 + 2\alpha + \alpha^2$, kde α je „malé“.

Pre dostatočne veľké n môžeme α^2 zanedbať (bude chyba výpočtu) a písať $\sqrt[2n+1]{10} – 1 \approx (\sqrt[en]{10} -1)/2$. Odkiaľ je po vynásobení tejto približnej rovnosti číslom 2^{n+1} dostaneme vzťah $2^{n+1}(\sqrt[2n+1]{10} – 1) \approx 2^n\ (\sqrt[2n]{10} – 1\ )$, z ktorého vyplýva, že výraz sa pri ďalšom raste n prakticky nemení.

Zavedením označenia $\sqrt[2n]{10} = x$, t.j. $log_{10}x = 1/2^n$ dostaneme $2^n\ (\sqrt[2n]{10} – 1\ ) = (x – 1) / log_{10}x$. tú istú hodnotu x môžeme dostať, ak číslo *10* nahradíme ľubovoľným iným kladným číslom a, teda $\sqrt[2m]{a} \approx x$. Potom $log_{10}x \approx log_{10}a\ /2^m$ a využitím predchádzajúcej približnej rovnosti dostaneme $2^n\ (\sqrt[2n]{10} – 1\ ) \approx 2^m\ (\sqrt[2m]{a} -1) / log_{10}a$, odkiaľ $log_{10}a \approx 2^m\ (\sqrt[2m]{a} -1) / 2^n\ (\sqrt[2n]{10} – 1)$ Týmto je výpočet *dekadického logaritmu* čísla a prevedený na *iterovaný výpočet druhej odmocniny* z tohto čísla. V snahe dosiahnúť čo najpresnejší výsledok *H. Briggs* vypočítal 54-tú iteráciu druhej odmocniny z čísla 10 s presnosťou na 32 desatinných miest.

V roku 1628 holandský matematik *Adrien Vlacq* (1600 – 1667) doplnil prácu *J. Napiera* a *H. Briggsa* a vydal 10-miestne dekadické logaritmy od 1 po 100000. V súvislosti s logaritmami i samotnou logaritmickou funkciou je vhodné uvedomiť si, že *logaritmické tabuľky* a *logaritmické pravítko* skonštruované W. Oughtredom sa stali na takmer 350 rokov veľmi dôležitými a účinnými prostriedkami pre približné výpočty.



Logaritmické a počtové pravítka

Použitá literatúra:

1. Fulier J.: *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. Nitra, UKF, 2001.
2. Depman I. , Folta J.: *Svet čísel*. Bratislava, SNP, 1973