ÚVOD

Matematická analýza predstavuje časť matematiky, ktorej pojmy a metódy sa zakladajú na idee **limitného prechodu**. Prvá definícia pojmu limity pochádza od **Augustina Louisa Caychyho** (1789-1857), z jeho ***Lecons sur le calcul infinitésimal***, vydaných v roku **1823**. Preto väčšina univerzitných kurzov matematickej analýzy sa začína až touto definíciou.

Samotný termín **matematická analýza** je však o vyše sto rokov starší a pochádza od **Leonarda Eulera** (1707-1783), ktorý roku 1748 vydal svoju klasickú učebnicu ***Introductio in analysin infinitorum***. U Eulera je plný názov príslušnej disciplíny matematická analýza nekonečne malých, a tento názov používal aj Cauchy. Až v polovici 19. storočia bol z matematiky pojem nekonečne malej veličiny odstránený, čo sa prejavilo aj jeho vypustením z názvu disciplíny.

Euler však matematickú analýzu nevymyslel. Ako píše v úvode svojej knihy, iba pozbieral a systematicky vyložil poznatky, ktoré boli v jeho dobe bežne známe. Matematická analýza sa zrodila zhruba sto rokov pred Eulerom, kedy chýbala ako definícia pojmu limity tak aj názov pre novú disciplínu. Zakladateľmi matematickej analýzy boli **Isaac Newton** (1643-1727) a **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716). Leibnizova práca ***Nova methodus pro maximis et minimis*** z roku **1684** je prvou publikáciou, obsahujúcou počítanie s diferenciálmi. Samotný pojem diferenciálu, ako aj jeho symbolický zápis pomocou **dx** pochádza od Leibniza. Pritom diferenciály považoval Leibniz za nekonečne malé veličiny.

Ale ako hovorí samotný názov Leibnizovej práce, je to nová metóda, a teda pred ňou existovali metódy staré. Tie sa tiahli späť až do antiky a prvým matematikom, ktorý robil výpočty pomocou techník, ktoré jasne predchádzajú Leibnizov diferenciálny a integrálny počet bol **Archimedes zo Syrakús** (287-212 pnl.). Jeho **kvadratúra paraboly** či výpočet objemu gule obsahujú veľmi zaujímavé techniky, v ktorých už možno rozpoznať zárodočnú ideu integrovania.

Pozoruhodné je však, že ani Archimedes nebol prvým matematikom, ktorý úspešne riešil problémy, ktoré dnes bežne radíme do matematickej analýzy. Asi prvým matematikom, v ktorého prácach možno nájsť úvahu, ktorá implicitne obsahuje pojem limity, bol **Eudoxos z Knidu** (408-355 pnl.). Ním pravdepodobne rozpracovaná **exhaustačná metóda** je vôbec prvá technika, ktorá síce veľmi zložitým a ťažkopádnym spôsobom, ale predsa umožňuje určiť veličiny, ako je obsah kruhu, ktoré dnes bežne počítame pomocou integrovania.

Ale prv, ako sa vypracujú techniky na riešenie určitého problému, musí tu byť samotný problém. Musí tu byť vedomie o tom, že určité veličiny sa nedajú vypočítať jednoduchým násobením, delením, sčítaním a odčítaním. A objav tejto skutočnosti sa udial storočie pred Eudoxom, a jeho autorom je podľa legendy **Hippasos z Metapontu** (510-497 pnl.). Ide o objav **nesúmerateľnosti** strany a uhlopriečky štvorca. Je to jeden z najpozoruhodnejších objavov antickej matematiky, lebo je základom pre odlíšenie právd rozumu a právd zmyslov. Ľubovoľné dve úsečky nakreslené na papieri sú zrejme súmerateľné, lebo obe predstavujú konečný počet atómov uhlíka, či molekúl iného farbiva.

A koniec koncov, každé meranie má hranicu presnosti, existuje určitá minimálna vzdialenosť, od ktorej ak sú dva body k sebe bližšie, už ich nevieme od seba odlíšiť. To ale znamená, že každá nameraná úsečka je celočíselným násobkom tejto minimálnej dĺžky, a teda pomer dĺžok ľubovoľných dvoch skutočných úsečiek je pomerom dvoch celých čísel. Hippasos však objavil, že strana a uhlopriečka štvorca, ak ich chápeme nie ako zmyslové predmety, ale ako matematické objekty, sú nesúmerateľné, pomer ich dĺžok nemožno vyjadriť pomocou pomeru celých čísel.

Pre antickú matematiku, a predovšetkým pre pytagorejskú školu, ku ktorej Hippasos patril, bol tento objav šokujúci. Hovorili o ňom ako o niečom nepochopiteľnom a nepredstaviteľnom. S trochou anachronizmu v ňom možno vidieť **prvý dotyk so svetom matematickej analýzy**. Lebo čo sa skrýva za objavom nesúmerateľnosti je skutočnosť, že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo, a teda na jej výpočet potrebujeme limitný prechod. Samozrejme Gréci to takto nechápali, a namiesto po limite siahli po geometrii, a namiesto výpočtu hodnoty $\sqrt{2}$ našli spôsob, ako sa počítaniu úplne vyhnúť. Ale tak či onak, Gréci sú prvou civilizáciou, ktorá vedela, že vedľa veličín, ktoré sa dajú vypočítať konečným počtom aritmetických operácií existujú aj veličiny, ktoré sa tak vypočítať nedajú.

Napríklad matematici starého Egypta netušili, že obsah kruhu je záludná veličina, a že postup, ktorý na jej určenie používajú je len približný. Aj keď používali veľmi dobré priblíženie - druhú mocninu z 8/9 priemeru, čo dáva hodnotu

$$\pi = 3,16049,$$

nič nenasvedčuje tomu, že by si boli vedomí skutočnosti, že je to len približná hodnota. Táto hodnota je uvedená v Rhindovom papyruse, ktorý vznikol okolo roku **1800** pnl. Svedčí o tom, že Egypťania nemali ani potuchy o tom, že k príslušnej veličine sa možno len limitne približovať.

V tomto semestri postupne prejdeme dejinami matematickej analýzy zhruba od Archimeda po druhú polovicu 19. storočia a ukážeme si, ako sa postupne menilo chápanie jej základných pojmov a metód. Diela, ktoré som spomenul v tomto stručnom prehľade predstavujú medzníky v jej vývine, a postupne sa podrobnejšie oboznámime z ich obsahom, ako aj kontextom. Naše rozprávanie začneme pytagorejskou školou.

2 PYTAGOREJSKÁ ŠKOLA A KONTEXT OBJAVU NESÚMERATEĽNOSTI

Skutočnosť, že ***existujú veličiny, ktoré sa nedajú vyjadriť pomocou čísel***, a teda ich aritmetickú hodnotu môžeme určiť len približne, objavili pytagorejci okolo roku **500** pnl. To, že kedy presnejšie, sa nedá určiť, lebo svoje poznanie udržiavali v tajnosti. Pytagorejci tvorili bratstvo, alebo dnes by sme skôr povedali, mystickú sektu v meste Kroton. Mali prísne predpisy ohľadom životosprávy, jedli výlučne vegetariánsku stravu a mali spoločný majetok. Ich cieľom bolo očistenie duše a jej spojenie z božstvom pomocou matematiky. Matematika tvorila súčasť ich náboženstva. Podľa ich presvedčenia Boh stvoril svet v súlade s harmóniou čísel. Harmónia sveta je božskej povahy a jej podstatu tvoria číselné pomery. Kto pochopí harmóniu čísel, sám sa stane bohom a bude nesmrteľný. Preto bolo pytagorejské učenie tajným učením, prístupným len pre zasvätených.

Hudba, harmónia a čísla tvorili základ pytagorejskej výchovnej metódy, lebo pozdvihujú dušu k bohu. V ich učení sa miesila matematika s číselnou mystikou. Pythagoras, zakladateľ sekty, bol podľa tradície v Egypte aj Babylone, kde sa od babylonských mágov naučil číselnú mystiku, astronómiu a hudobnú náuku. Podľa iných správ sa dokonca stretol so Zarathustrom. Pythagoras sa nazval ***filozofom***, hovoril totiž, že nie je mudrc, ale len milovník múdrosti. Od neho pochádza samotný termín filozofia. Po Pytagorovej smrti nastal v pytagorejskom bratstve rozkol. Vyvolal ho Hippasos, ktorý porušil pravidlá sekty, a to hneď v dvoch smeroch. Jednak si dovolil vylepšovať učenie majstra a dopĺňať ho rôznymi novinkami (skonštruoval guľu opísanú okolo dvanásťstena, v hudobnej harmónii vedľa oktávy, kvinty a kvarty zaviedol aj dvojitú oktávu a duodecimálu). Ešte väčším hriechom však bolo, že nedržal učenie v tajnosti, ale ho vyzradil ľuďom, ktorí neboli členmi pytagorejského bratstva. Preto Hippasa vylúčili z bratstva. To malo za následok rozkol v sekte.

Hippasovi nasledovníci sa označili ako ***mathématikoi***, a ich nasledovníkmi sme aj my, lebo matematiku považujeme za verejnú vec. V protiklade k nim stáli ***akusmatikoi*** (tí, čo chcú počuť) čo boli členovia bratstva, ktorí naďalej dodržiavali staré predpisy a odovzdávali ďalej posvätné učenie (akusmata). Postupne sa pytagorejské hnutie rozpadlo na viaceré nezávislé sekty, ktoré existovali po dobu zhruba dvoch storočí. Pytagorejci rozoznávali štyri ***mathématai***, t.j. vedecké disciplíny: *aritmetika* (teória čísel), *harmonika* (teória hudby), *geometria* a *astrologia* (náuka o hviezdach). Z tohto dôvodu je napríklad v angličtine matematika označovaná ako matematics, teda plurálom, lebo existujú štyri matematiky.

Objav nesúmerateľnosti predstavoval pre pytagorejcov veľký šok. Znamenal, že určité pomery nie je možné vyjadriť pomocou čísel, že určité harmónie nemajú číselnú podobu. Túto skutočnosť označil jeden komentátor Euklida ako ***kai alogon, kai aneideion***, t.j. ako niečo nevysloviteľné a nepredstaviteľné. Každopádne táto nepredstaviteľná a nevyjadriteľná skutočnosť je pravda, a preto bolo treba celú pytagorejskú matematiku úplne prebudovať. Jednak bolo treba opustiť čísla a aritmetickú symboliku nahradiť geometrickou. To malo za následok, že keď Euklides dokazuje nejakú vetu z teórie čísel, kreslí úsečky a argumentuje geometricky. Aritmetika ako veda, teda ako mathemata je na niekoľko storočí zdiskreditovaná a Gréci ju označujú opovržlivým termínom počty, ***logistiké***. Okrem toho bolo treba vypracovať techniky, ktoré by umožňovali pracovať s nesúmerateľnými veličinami.

3 TEÓRIA PROPORCIÍ

Prvá technika tohto druhu pochádza od **EUDOXA Z KNIDU**. Je to ***<u>teória proporcií</u>***, ktorá umožňuje dávať do pomeru veličiny bez toho, aby sme ich mali vyjadrené pomocou čísel. Teória proporcií je uvedená v piatej knihe Euklidových základov, ale dnes je všeobecne prijatý názor, že Euklides ju prebral z Eudoxovho spisu, ktorý sa nedochoval. Jej základom je

Definícia 5: Hovoríme, že veličiny stoja v rovnakom pomere, prvá s druhou ako tretia so

štvrtou, ak rovnaké násobky prvej a tretej sú súčasne väčšie, alebo súčasne rovné alebo súčasne menšie od rovnakých násobkov druhej a štvrtej, každá od každej pri ľubovoľnom násobku, brané v zodpovedajúcom poradí.

Teória proporcií umožňuje dávať do pomeru aj veličiny, ktorých dĺžky sa nedajú vyjadriť pomocou čísel, teda napríklad aj nesúmerateľné veličiny. V antickej matematike mala teória proporcií pomerne široké uplatnenie, lebo pomocou nej Eudoxos a Euklides prebudovali celú matematiku. Okrem iného teória proporcií umožnila po prvý krát exaktne hovoriť o obsahu kruhu, nie pomocou nejakej približnej hodnoty, ale o obsahu, ako matematickej veličine. V súčasnej matematike zapisujeme obsah kruhu ako $\boldsymbol{\pi r^2}$. Ale Gréci nemali ***algebraickú symboliku***, preto nemohli napísať vzorec. Vzorce sa v matematike objavujú veľmi neskoro, až v 15. storočí. Okrem toho Gréci nemali ani ***reálne čísla***, pre nich číslo bolo výlučne číslo prirodzené. Preto nemohli hovoriť o nejakom čísle π.

Misto toho hovorili o pomere obsahu kruhu a štvorca nad jeho stranou. Preto tam, kde my jednoducho napíšeme $\mathbf{S = \pi r^2}$ Euklides píše ***Kruhy sa majú k sebe ako štvorce ich priemerov***. Tam, kde by sme my pomocou *limity* našli *konštantu* úmernosti vo *vzorci* vyjadrujúcom obsah individuálneho kruhu, Euklides udáva pomer medzi obsahmi dvoch kruhov a obsahmi štvorcov nad ich priemermi. V tomto pomere sa čísla π vykrátia, a teda netreba žiadnu limitu. Na dôkaz podobných tvrdení slúžila exhaustačná metóda.

4 EUDOXOVA EXHAUSTAČNÁ METÓDA

Druhou technikou, ktorú vypracoval Eudoxos je ***exhaustačná metóda*** (metóda vyčerpávania). Pomocou exhaustačnej metódy Eudoxos dokázal, že plochy kruhov sú v pomere druhých mocnín ich priemerov, a že objem kužeľa je rovný 1/3 objemu valca, ktorý má s kužeľom zhodnú podstavu a výšku. **EUKLIDES (330 - 270 pnl.)** pomocou tejto metódy ukázal, že objemy gúl sú v rovnakom pomere, ako tretie mocniny ich priemerov. Základom exhaustívnej metódy je

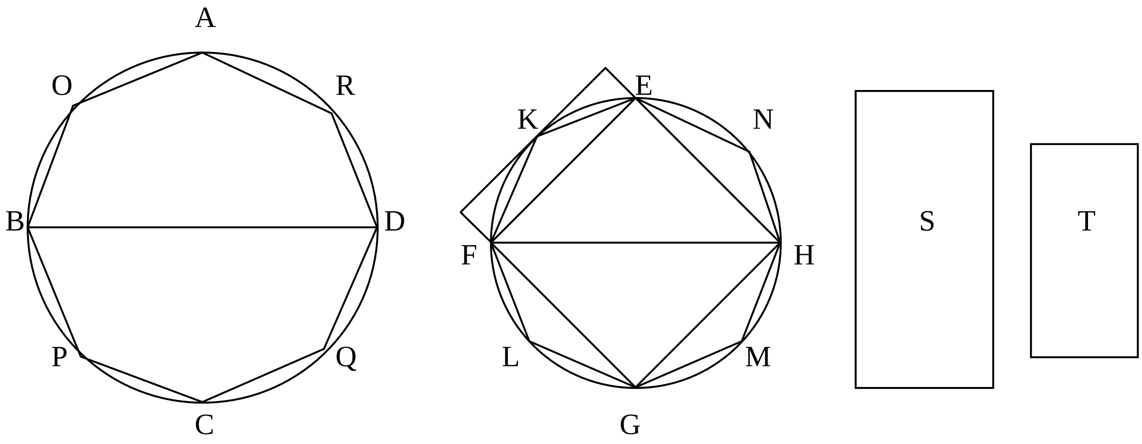
Propozícia X, 1: Ak sú dané dve rôzne veličiny, a z väčšej zoberieme viac než jej polovicu, zo zvyšku opäť viac než jeho polovicu, a v tomto neustále pokračujeme, tak skôr či neskôr nám ostane taká veličina, ktorá je menšia, než menšia z dvojice daných veličín.

Takže pozrime sa, ako Euklides dokazuje tvrdenie o obsahu kruhu.

Propozícia XII. 2: Kruhy sa majú k sebe ako štvorce ich priemerov.

Ako som už spomenul, Euklides nemal ešte pojem limity, preto dôkazy robil dvojitou redukciou ad absurdum.

Nech ABCD, EFGH sú kruhy a BD, FH sú ich priemery. Tvrdím, že kruh ABCD je ku kruhu EFGH ako štvorec nad BD ku štvorcu nad FH.



Lebo ak štvorec nad BD nie je ku štvorcu nad FH ako kruh ABCD ku kruhu EFGH, tak v pomere v akom je štvorec nad BD k štvorcu nad FH, bude kruh ABCD k určitej menšej ploche ako je plocha kruhu EFGH alebo k väčšej.

Napred nech je v rovnakom pomere k menšej ploche S.

Vpíšme do kruhu EFGH štvorec EFGH. Tento vpísaný štvorec je väčší než polovica kruhu EFG, lebo keď bodmi E, F, G, H vedieme dotyčnice ku kruhu, štvorec EFGH je polovicou tohto opísaného štvorca, a kruh je menší než je opísaný štvorec. Preto vpísaný štvorec EFGH je väčší ako polovica kruhu EFGH.

Rozpolme oblúky EF, FG, GH, HE bodmi K, L, M, N a vytvorme trojuholníky EKF, FLG, CMH, HNE. Každý z týchto trojuholníkov je tiež väčší ako polovica odseku kruhu, pretože ak cez body K, L, M, N vedieme dotyčnice ku kruhu a doplníme ich na obdĺžniky nad úsečkami EF, FG, GH, HE, každý z trojuholníkov EKF, FLG, GMH, HNE bude polovicou obdĺžnika nad ním, kým odsek kruhu je menší ako obdĺžnik, takže každý z trojuholníkov EKF, FLG, GMH, HNE je väčší ako polovica odseku nad nimi.

Takže rozpolovaním zvyšných oblúkov a vpisovaním trojuholníkov, ***robiac to neustále****, dospejeme k odsekom kruhu, ktoré budú menšie ako prebytok, ktorým kruh EFGH presahuje plochu S.*

Pretože bolo dokázané v prvej vete desiatej knihy, že ak sú dané dve navzájom rôzne veličiny a ak z väčšej budeme uberať veličinu väčšiu než polovica, a z toho, čo ostane veličinu väčšiu ako polovica, a ak toto budeme neustále robiť, ostane veličina, ktorá bude menšia ako bola menšia z daných veličín.

Nech zvyšné odseky sú ako na obrázku a nech odseky kruhu EFGH nad EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE sú menej než prebytok, ktorým kruh EFGH presahuje plochu S. Preto mnohouholník EKFLGMHN je väčší ako plocha S.

Vpíšme aj do kruhu ABCD mnohouholník AOBPCQDR podobný s EKFLGMHN. Potom V rovnakom pomere ako je štvorec nad BD k štvorcu nad FH, sú aj mnohouholník AOBPCQDR k mnohouholníku EKFLGMHN.

Ale štvorec BD je ku štvorcu FH rovnako ako je kruh ABCD k ploche S. Preto kruh ABCD je k ploche S ako mnohouholník AOBPCQDR k mnohouholníku EKFLGMHN. Preto kruh ABCD je p polygónu vpísaného do neho, ako je plocha S k polygónu EKFLGMHN.

Ale kruh ABCD je väčší než polygón doňho vpísaný, preto plocha S je väčšia ako polygon EKFLGMHN, ale je tiež menšia, a to je nemožné.

Preto v pomere v akom je štvorec nad BD ku štvorcu nad FH, nie je kruh ABCD k žiadnej ploche menšej ako kruh EFGH.

Podobne môžeme dokázať, že v pomere v akom je štvorec nad BD ku štvorcu nad FH, kruh EFGH nie je k žiadnej ploche menšej ako kruh ABCD.

Teda vidíme, ako komplikovane Euklid rieši problém, ktorý v súčasnej analýze zaberie zhruba jeden riadok. Problém je jednak v tom, že Gréci nepoznajú ***iracionálne čísla***, preto nevedia veličinu π vyjadriť symbolom, ale namiesto toho hovoria, že kruhy sa majú k sebe ako štvorce ich priemerov. To je dôvod, prečo sa číslo π nazýva Ludolfovo číslo až po matematikovi, **Ludolphovi van Ceulen** (1540-1610) a nie po Euklidovi, či nebodaj Eudoxovi. V antike neexistovalo žiadne číslo π, lebo Gréci poznali len prirodzené čísla.

Podobne Gréci ***nemali pojem limity***, preto dôkaz robili zdĺhavou dvojitou redukciou ad absurdum. Preto i keď nemožno poprieť, že Eudoxos je duchaplný, ale celú svoju duchaplnosť vyčerpáva na prekonávanie obmedzení jazyka Gréckej matematiky.

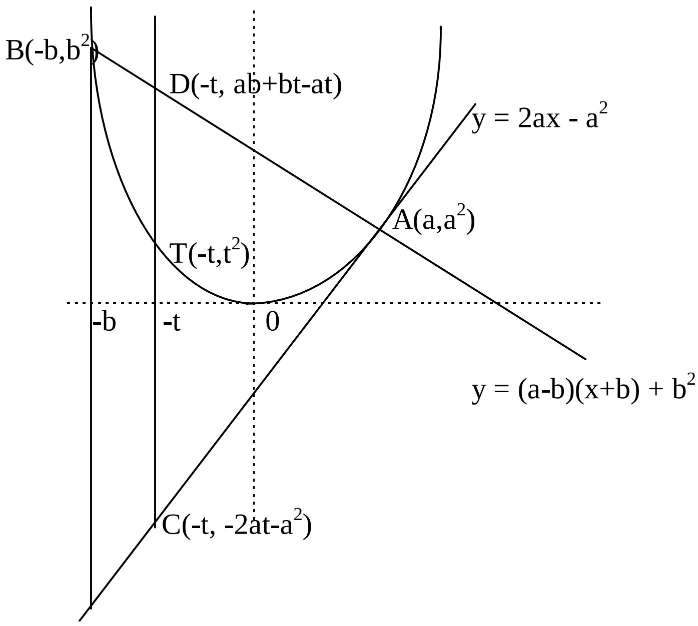
Keď sa na exhaustačnú metódu pozrieme očami modernej matematiky, nie je ťažké v nej zahliadnuť ***základnú ideu teórie radov***, ktorá spočíva v tom, že ak potrebujeme vypočítať určitú veličinu, ktorá sa nedá určiť konečným počtom krokov, pokúsime sa napred určiť aspoň jej hlavnú časť. Pritom nám ostane určitý zvyšok, takže v druhom kroku sa pokúsime určiť hlavnú časť tohto zvyšku, atď. Euklides pri výpočte obsahu kruhu napred vpísal do kruhu štvorec, čo je prvé priblíženie, a ako zvyšok mu ostali štyri odseky. Potom do týchto odsekov vpísal trojuholníky, etc. Takže ***exhaustívna metóda je v istom zmysle predchodkyňou teórie radov***. Geometrický jazyk je však pre ňu pomerne ťažkopádny, a tak na poli teórie radov sa Gréci nedostali ďalej než jednoduchý geometrický rad.

5 ARCHIMEDOVA METÓDA PÁKY

Naproti tomu v druhej základnej technike matematickej analýzy - integrovaní - Gréci dosiahli pozoruhodných výsledkov. Keď chceme vypočítať obsah či objem nejakého útvaru, nemusíme útvar postupne aproximovať, ako sa to robí v procese exhaustácie. Môžeme celý výpočet urobiť naraz, keď útvar rozdelíme na geometrické atómy a tieto preskupíme tak, aby sme dostali útvar, ktorého obsah sa dá určiť ľahšie. ***Geometrický atomizmus*** možno považovať za alternatívu k teórii proporcií, určenú rovnako ako teória proporcií, na prekonanie problémov s nesúmerateľnosťou. V antike dosiahol v tejto technike vrcholné majstrovstvo **ARCHIMEDES**. Je však zaujímavé, že rezanie útvarov na atómy používal iba ako heuristickú techniku. Každý výsledok, ktorý takto našiel, potom pracne dokázal exhaustívnou metódou. Takže predchodkyňa integrovania nebola v antike považovaná za korektnú metódu. Príčina spočívala v atomizme, totiž keby bol atomizmus skutočne pravdivou teóriou, tak aj strana a uhlopriečka štvorca by museli pozostávať z určitého počtu atómov, a mohli by sme sa atomika spýtať, či je ten počet párny alebo nepárny.

Archimedes bol jedným z najvýznamnejších matematikov antiky. Ukážeme si dve jeho práce, kvadratúru parabolického odseku a výpočet objemu gule. V oboch prípadoch použil Archimedes ako tecnický nástroj na preskupenie atómov zákon rovnováhy na páke.

5.1 Kvadratúra paraboly



Skôr, než pristúpime k výpočtu obsahu odseku paraboly, ukážeme si jednu zaujímavú vlastnosť odseku paraboly, ktorú Archimedes vo svojom diele považuje za samozrejmú. Analytický dôkaz, ktorý tu uvediem, je porušením historickej etikety, lebo v antike žiadne súradnice nemali.

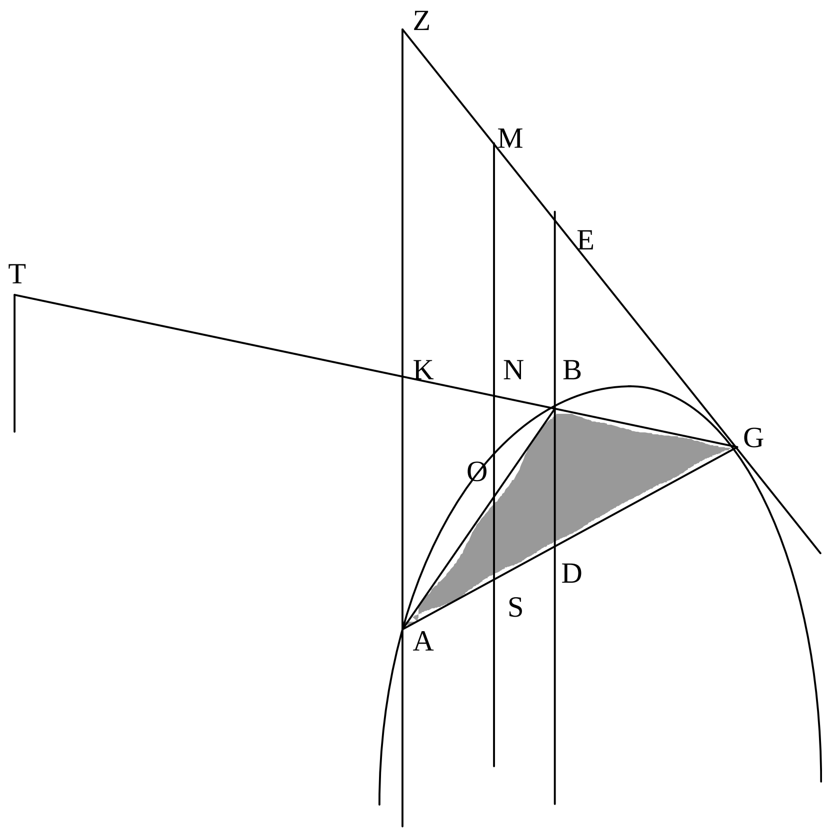
Archimedes tvrdí, že ak pretneme tetivu paraboly BA priamkou DC rovnobežnou s osou paraboly, bude platiť $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|DT|}{|DC|}$. Skutočne, $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{b-t}{b+a}$, kým na druhej strane

$$\frac{|DT|}{|DC|} = \frac{(a-b)(-t+b)+b^2-t^2}{(a-b)(-t+b)+b^2+2at+a^2} = \frac{-at+ab+bt-tt}{at+ab+bt+aa} = \frac{(b-t)(a+t)}{(a+t)(b+a)} = \frac{b-t}{b+a}$$

Toto je celkom pekná vlastnosť paraboly. Keď hocikde vedieme rovnobežku s osou paraboly, tak parabola nám ju rozdelí v rovnakom pomere, ako táto os delí tetivu paraboly.

Nech ABG je odsek paraboly, ohraničený tetivou AG a oblúkom paraboly ABG. Nech bod ***D***

je stred tetivy AG. Veďme bodom D rovnobežku s osou paraboly. Archimedes tvrdí, že parabolický odsek ABG má obsah rovný 4/3 obsahu trojuholníka ABG.



Veďme bodom A rovnobežku s osou paraboly DB a dotyčnicu k parabole v bode G. Dostaneme priesečníky E a Z. Zostrojme na priamke KG bod T tak, aby TK = KG a predstavme si, že úsečka TG je páka podopretá v bode K. Veďme úsečku MS rovnobežnú s osou paraboly cez ľubovoľný bod O paraboly.

BD = BE, preto NS = NM a KA = KZ

$$\frac{SM}{SO} = \frac{AG}{AS} = \frac{KG}{KN} = \frac{KT}{KN} \text{ a teda } \frac{SM}{SO} = \frac{KT}{KN}$$

To ale znamená, že ak na druhom konci páky, t.j. v bode T, zavesíme úsečku dĺžky SO, tak táto nám vyváži úsečku MS, keď túto necháme na mieste. To isté platí pre všetky úsečky, ktoré tvoria trojuholník AGZ: na tom mieste, kde sa nachádzajú, vyvážia tú svoju časť, ktorá vchádza do odseku paraboly, keď ju prenesieme do bodu T. Zatiaľ je všetko exaktné, a ***teraz prichádza pointa***:

Keďže trojuholník AGZ pozostáva zo všetkých úsečiek SM, a parabolický odsek ABG zas zo všetkých úsečiek SO, preto trojuholník AGZ na tom mieste, na ktorom sa nachádza, je v rovnováhe s parabolickým odsekom, keď jeho ťažisko umiestnime do bodu T. Ťažisko trojuholníka AGZ je v bode X, v jednej tretine úsečky KG. Keďže KT = 3KX a keďže parabola a trojuholník budú v rovnováhe, hmotnosť trojuholníka je trikrát väčšia ako hmotnosť parabolického odseku.

$$|\Delta AGZ| = 2\,|\Delta AGK| = 4\,|\Delta ABG|$$

Keďže Δ BDG je podobný s Δ KAG a koeficient podobnosti je 2, je BG = BK a teda

| ⊄ AGZ | = 1/3 |Δ AGZ | = 4/3 |Δ ABG |

Predstava parabolického odseku ako sumy nekonečného počtu úsečiek je veľmi blízke Leibnizovej predstave, podľa ktorej integrál $\int f(x)dx$ predstavuje celok tvorený nekonečným počtom zložiek tvaru f(x)dx. Pritom samozrejme Archimedes nemá pojem funkcie, preto funkčná závislosť f(x) je zadaná čiste geometricky. Podobne Archimedes nemá ani pojem diferenciálu dx, ale úlohu diferenciálnej formy hrá u Archimeda práve páka.