Katolícka univerzita v Ružomberku, Pedagogická fakulta

História matematiky

Teória množín

Mária Sedmáková

Mat – Inf, 4. ročník

V práci sa budem zaoberať najdôležitejšími momentmi matematického skúmania pojmu nekonečna, ktoré viedlo k vzniku teórie množín, priblížim pojem množiny a tiež, že s týmto pojmom treba opatrne pracovať.

Nekonečno v matematike

Sú možné dve predstavy toho, že prirodzených čísel je nekonečne mnoho. Jedna predstava je taká, že máme prirodzených čísiel ľubovoľne mnoho, presnejšie, ak máme nejaké prirodzené čísla, tak vieme utvoriť vždy ďalšie – nové prirodzené číslo. V tomto prípade hovoríme o *potenciálnom nekonečne.* V každom momente pracujeme len s niekoľkými – konečným počtom, ale naša technológia umožní vždy vyrobiť ďalší nový objekt.

Druhá predstava je predstava *aktuálneho nekonečna.* „Máme" naraz všetky prirodzené čísla, alebo si predstavujeme všetky reálne čísla súčasne.

Grécka antická matematika mala problémy s nekonečnom. Na pojem aktuálneho nekonečna grécki matematici narazili, ale nesnažili sa ho skúmať, do určitej miery ho odmietli. ***ARISTOTELES*** (384 – 322 pred n. l.) hovorí, že nekonečno je nedokonalé, neskončené (!) a teda nemysliteľné. Iné odmietnutie aktuálneho nekonečna môžeme ilustrovať na známych paradoxoch, ktoré vo svojom diele uvádza ***ZENÓN z ELEY*** (5. st. pred n. l.): paradox nazvaný Dichotómia a druhý paradox, Achilles a Korytnačka.

Nemecký matematik ***GEORG CANTOR*** (1845 - 1918) k skúmaniu nekonečných celkov prišiel úplne z praktického dôvodu. Matematika 18. a 19. storočia skúmala *Fourierove rady* ako užitočný nástroj na riešenie rôznych problémov. Zaoberal sa otázkou jednoznačnosti rozvoja funkcie do Fourierovho radu. Dokázal takúto vetu: „Ak pre všetky $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ rad

$$\sum (a_n * \cos nx + b_n * \sin nx)$$

konverguje a jeho suma sa rovná nule, tak pre každé n je $a_n = b_n = 0$." Neskôr ukázal, že predpoklad vety možno zoslabiť tým, že pripustíme výnimku. Stačí žiadať, že uvedený rad konverguje k nule pre každé $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ okrem jedného x_0. Potom zistil, že môže pripustiť dve výnimky, tri výnimky atď. Dokonca môže pripustiť „nekonečne mnoho" výnimiek. Ale tu už treba byť opatrný, lebo celý interval $\langle 0, 2\pi \rangle$ ani napr. interval $\langle 0, \pi \rangle$ nemôže byť výnimka. Tak prišiel ***CANTOR*** k myšlienke skúmať aktuálne nekonečno. Zaviedol pojem **Menge** a skúmal jeho vlastnosti.

Teda pojem množiny historicky vzniká ako prirodzený nástroj na skúmanie pojmu aktuálneho nekonečna.

Český matematik ***MATYÁŠ LERCH*** (1860 - 1922) na konci 19. storočia už používa na preklad pojmu **Menge** do češtiny slovo *množina.* V roku 1936 Jednota českých matematikov a fyzikov vydáva knihu s názvom *Bodové množiny*, ktorú napísal ***EDUARD ČECH*** (1893 - 1960) a pojem množina sa v češtine a slovenčine definitívne ujíma.

Paradoxy nekonečna

Množina je pojmom, ktorý stojí prvý v rade definícií a teda v matematickom zmysle sa pojem množina nedá definovať. Aspoň si vysvetlíme, čo množina je a čo nie je.

B. BOLZANO vysvetľuje pojem množiny asi takto. Uvažuje súhrn určitých vecí ako jeden celok. V niektorých súhrnoch je však podstatný spôsob spojenia alebo usporiadania jeho prvkov. Napríklad pohár a pohár rozbitý na kusy obsahujú tie isté časti, ale s rôznym spôsobom spojenia. Množina je taký súhrn, v ktorom je spôsob spojenia alebo usporiadania jeho prvkov ľahostajný.

Aj podľa ***CANTORA*** je množina súhrn množstva vecí chápaný ako jediný celok. Dohodneme sa spolu s ***BOLZANOM*** i ***CANTOROM***, že možina je súhrn nejakých vecí, ktoré nazývame prvky tejto množiny. Ak x je prvok množiny A, píšeme x patrí do A: $x \in A$.

Negáciu zapisujeme x nepatrí do A: $x \in A$.

Množinu poznáme, keď vieme, čo do nej patrí a čo do nej nepatrí.

Množina môže byť daná rôznymi spôsobmi. Môžeme dať zoznam jej prvkov, alebo množinu určujeme jej charakteristickou vlastnosťou.

So zadávaním množiny pomocou charakteristickej vlastnosti musíme byť opatrní, lebo ľahko narobíme nepríjemnosti – vzniknú nám *paradoxy – protirečenie.*

Prvé paradoxy v teórii množín sa objavili v roku 1895 ***(G. CANTOR)*** a 1897 ***(CESARE BURALI-FORTI)*** a boli založené na pojmoch mohutnosť množiny a dobre usporiadaná množina. ***BERTRAND RUSSEL*** (1872 - 1970) v roku 1903 opísal takýto paradox. Uvažujme množinu M určenú charakteristickou vlastnosťou *„x nepatrí do x"*. Teda

$$x \in M \equiv M \in M.$$

Špeciálne, pre $x = M$ dostávame evidentný spor

$$M \in M \equiv M \in M.$$

Vysvetlenie tohoto paradoxu je jednoduché: množina M s uvedenou charakteristickou vlastnosťou neexistuje.

Našťastie podstata týchto paradoxov nie je v tom, že používame pojem množina. Paradox množiny všetkých množín, ktoré neobsahujú seba, ***B. Russel*** sformuloval ako paradox holiča: *V dedine žil holič, ktorý holil všetkých mužov dediny, ktorí neholili seba. Kto holil holiča?* Tento paradox bol známy už v staroveku ako paradox krétskeho luhára. V liste sv. Pavla Títovi sa vyskytuje v takejto podobe: *Jeden z nich (kréťanov) povedal, že kréťania vždy luhajú.*

Použitá literatúra:

BUKOVSKÝ L., ***Množiny a všeličo okolo nich,*** Univerzita P. J. Šafárika v Košiciach, 2005