Katolícka univerzita, Pedagogická fakulta, Ružomberok

Kombinatorika

Sabolová Martina
4. ročník
M – Nv

O začiatkoch kombinatoriky toho veľa nevieme. Na rozdiel od mnohých iných častí matematiky, nepochádza z Grécka, pretože prvé zmienky o kombinatorických úlohách nachádzame v **Indii**. Napr.: šiestimi rôznymi základnými príchuťami sa dá dosiahnuť celkove 63 chutí.

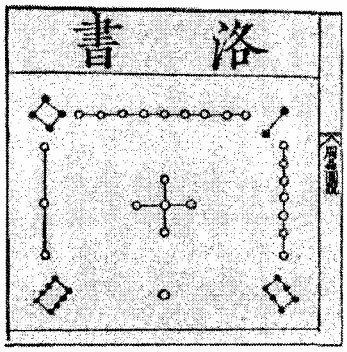
Výsledky kombinatorických úloh tohto obdobia boli ***vypísaním všetkých možností***, takže nevieme, či poznali aj nejaké všeobecné vzorce. Tie už môžme predpokladať u Varahamihiru, ktorý pri vyrábaní parfúmov uvažoval, že ak vždy zmieša 4 zo 16 základných ingrediencií, tak dostane 1820 nádejných voňaviek

“Z dvoch kameňov postavíš dva domy, z troch kameňov postavíš šesť domov, zo štyroch postavíš dvdsaťštyri domov, z piatich stodvadsať, zo šiestich sedemstodvadsať a zo siedmich päťtisíc štyridsať…” Je jasné, že už v **3. storočí** nášho letopočtu sa hovorilo o faktoriáloch.

Mnohí ďalší autori židovského a islamského sveta sa zaoberali hlavne úlohami o počte slov, ktoré možno zostaviť z daného počtu písmen v abecede, ale stále chýbali zovšeobecnenia. Až **Abraham ibn Ezra** (1090-1167) pozerajúc sa na hviezdy odvodil pravidlo na výpočet k- prvkových kombinácií zo 7 prvkov (pre k=2 – 7). Urobil to preto, lebo ho zaujímal počet všetkých možných konjukcií siedmich planét – Slnka, Mesiaca, Merkúra, Venuše, Marsu, Jupitera a Saturnu.

Hovorí sa, že kombinatorika je časť matematiky zaoberajúca sa rozdeľovaním, usporiadaním alebo výberom prvkov nejakej množiny. Z modernejšieho hľadiska je centrálnym pojmom kombinatoriky tzv. ***konfigurácia***, ktorý môžme charakterizovať ako *zobrazenie nejakej množiny objektov do konečnej abstraktnej množiny so zadanou štruktúrou*

Prvé “kombinatorické” výsledky či aspoň náznaky sú až prekvapivo staré. Pravdepodobne najstaršiu “konfiguráciu” možno nájsť v jednom z najstarších textov v posvätnej knihe taoizmu (Kniha premien) z roku približne 2200 pr. Kr. Nachádzajú sa tam dve konfiguácie nazývané Lo – šu a Riečna mapa.



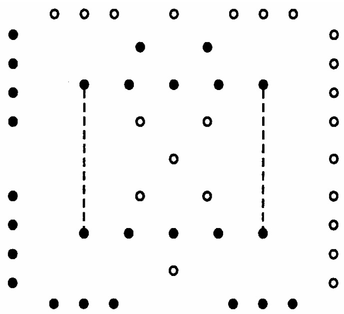
Obr. 1.1: Konfigurace „Lo-šu“ ve středověkém textu

Ak nahradíme znázornené skupiny bodov číslami, dostaneme magický štvorec (nazývaný Saturn)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

V tomto štvorci je súčet čísel v každom riadku, stĺpci a uhlopriečke rovný číslu 15.

Druhú konfiguráciu, ktorú mala na svojom pancieri znázornená korytnačka vyliezajúca z rieky Ho je



Obr. 1.2: Konfigurace „Říční mapa“

Ak to znázorníme číslami, dostaneme:

7
2
10 10
8 3 5 4 9
10 10
1
6

Táto schéma je pozoruhodná svojou „stredovou symetriou“. Platí napríklad

5 + 3 = 8, 5 + 1 = 6, ..., 3 + 10 + 2 = 8 + 7, 3 + 10 + 1 = 8 + 6 ....

Zrod kombinatoriky ako takej vidieť u Tartaglia (hod tromi kockami – ktorý súčet je najväčší?)

Kombinatorika ako matematická disciplína začína až v 16., 17. storočí – súčasne so vznikom teórie pravdepodobnosti (súviselo to s hazardnými hrami). Predstaviteľmi sú Pascal, Fermat, Euler .... Najrozšírenejšou sa stala v 20, storočí.

PASCALOV TROJUHOLNÍK

Pascalov trojuholník bol prvýkrát zavedený v Číne matematikom Yang Hui, ale pomenovaný bol podľa Blaise Pascala.

Yang dal formulu pre súčet stredných sérií, napr. hľadal súčet štvorcov prirodzených čísel z m^2 k $\{m+n\}^2$ a ukázal, že

$1 + 3 + 6 + ... + n(n + 1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6.$

Pascal

Prvé a posledné číslo je 1 v každom riadku, ale v 2. riadku máme 1 a 1, ale to nie je 11. 1 je vždy prvé číslo, ale ďalšie číslo je súčtom dvoch predchádzajúcich čísel. Napr. 1 + 2 = 3 a 2 + 1 = 3. Ďalšia je línia 1, nasledujúce 1 + 3 = 4 a 3 + 3 = 6 a 3 + 1 = 4 a 1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
… … … … … … … …

Súčet

Ak začíname1 a ideme po diagonále dole a urobíme krok vľavo, nájdeme číslo, ktoré sme hľadali. Napr.: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 alebo 1 + 8 + 36 + 120 + 330 = 495

Mocniny

Vezmime si číslo nasledujúce za 1 a spravme trojuholník z čísel, ktoré sú vedľa seba a číslo pod, keď je umocnené, môžeme povedať, že súčet čísel je rovný s umocneným.
Napr. 5^2=25, pozrime sa vpravo z 5 je 10, teraz sa pozrime na číslo, ktoré je súčtom 5 a 10, dostaneme 15 a teraz 10 + 15 = 25

Cesty

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Napr.:

$2^0=1$, $2^1=(1+1)=2$, $2^2=(1+2+1)=4$, $2^3=(1+3+3+1)=8$,

Využitie Pascalovho trojuholníka:

Důležitý vzťah opakovania nasleduje priamo z definície. Tento vzťah opakovania môže byť používaný ukázať sa ako matematickým prerušením o C (n, k) jeprirodzené číslo pre všetky n a k , fakt to nie je hneď zrejmé z definície. To taktiež dá svah Pascalovmu trojuholníku.

Začať 0 1 radmi 1 1 1 rada 2 1 2 1 rada 3 1 3 3 1 rada 4 1 4 6 4 1 rada 5 1 5 10 10 5 1 rady 6 1 6 15 20 15 6 1 rady 7 1 7 21 35 35 21 7 1 řady 8 1 8 28 56 70 56 28 8 1

Začínať na čísle n obsahuje čísla C (n, k) pro k = 0,...,n. To je budované tým, že začína ones nanejvýš a potom vždy pridávať dve priľahlé čísla a pisať súčet priamo pod. Táto metóda dovolí rychlý výpočet koeficientouv dvojčlena bez potreby zlomkov alebo multiplications. Například, tým, že se pozerá na číslo riadku 5 trojuholníka, jeden môže rýchlo prečítal to

$$(x+y)^5 = \mathbf{1}x^5 + \mathbf{5}\,x^4y + \mathbf{10}\,x^3y^2 + \mathbf{10}\,x^2y^3 + \mathbf{5}\,x\,y^4 + \mathbf{1}y^5.$$

Tretie uhlopriečka tvorí sled trojuholnikových čísel. Rodzdiely medzi elementami na oných uhloipriečkách sú elementy v predchádzajúcej uhlopriečke – důležitý ku vzťahu opakovania.

Trojuholník bol popisovaný Zhu Shijie v 1303 inzeráte v jeho knihe D*rahé zrkadlo štyroch elementov.* V jeho knihe Zhu sa zmírnil o trojuholniku jako o starovekej metóde (cez 200 rokov před jeho časom) pre platiace binomické koeficienty, ktorý ukázal, že metóda bola známa matematikom v Číne a päť storočí predd Pascalom.

$$(1+x)^n = \binom{0}{n} + \binom{1}{n}x + \binom{2}{n}x^2 + \ldots + \binom{n-1}{n}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

Binomický koeficient : $\binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Preklad z:

Yang Hui

He gives what today is called Pascal's triangle, up to the sixth row, saying that he learnt it from Jia Xian's treatise. Yang also gave formulae for the sum of certain series, for example he found the sum of the squares of the natural numbers from m^2 to $(m+n)^2$ and showed that

$1 + 3 + 6 + ... + n(n + 1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6.$

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Zhu_Shijie.html