K A T O L Í C K A   U N I V E R Z I T A

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

v Ružomberku

HISTÓRIA MATEMATIKY

Množina prirodzených čísel

Meno: Juliana Repková
Ročník: štvrtý
Odbor: učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov
Špecializácia: matematika – hudobná výchova
Školský rok: 2005/2006

História prirodzených čísel a príslušnosť čísla nula

Prirodzené čísla majú podľa všetkého pôvod v slovách, ktoré sa používali na počítanie vecí. Za dávnych čias ľudia rátali iba na prstoch, neskôr robili zárezy na tyčkách alebo uzly na povrázkoch. Starí Gréci už poznali guľôčkové počítadlo nazývané abakus. Podobné sa používalo v starej Číne pod názvom suan-pan a v Japonsku ako soroban. Pôvodní obyvatelia strednej Ameriky poznali a používali podobné počítadlá. Dnešná doba priniesla do škôl elektronické kalkulačky a pre vedu a techniku mimoriadne výkonné superpočítače.

Prvý veľký pokrok smerom k abstrakcii bolo použitie číslic na reprezentovanie čísel. Systém číslic umožnil zapisovať veľmi veľké čísla. Napríklad v Babylone vyvinuli silný pozičný systém založený na čísliciach pre 1 a 10. Starovekí Egypťania mali číselný systém s rôznymi hieroglyfmi pre 1, 10 a všetky mocniny čísla 10 až do miliónu. Zárezy na kameňoch z Karnaku, datované približne z roku 1500 pred Kristom (teraz uložené v Louvre v Paríži), zobrazujú číslo 276 ako 2 stovky, 7 desiatok a 6 jednotiek (podobne pre číslo 4 622). Ďalší krok k abstrakcii sa udial oveľa neskôr. Bola ním myšlienka nuly ako čísla s vlastnou číslicou. Číslica nula bola používaná v pozičných číselných systémoch už okolo roku 700 pred Kristom Babylončanmi, ale nikdy sa nepoužívala samostatne. Civilizácie Olmekov a Mayov používali nulu ako samostatné číslo okolo prvého storočia pred Kristom, avšak tento zvyk sa nikdy nerozšíril za hranice Mezoameriky. Koncept nuly, tak ako je to v súčasnosti, má pôvod v Indii a môžeme ho pozorovať u matematika Brahmaguptu v roku 628. Tak či tak, nulu používali ako číslo všetci stredovekí kalkulátori („živé kalkulačky“) počnúc Dionysiom Exiguusom v roku 525, ale vo všeobecnosti pre ňu neexistovala žiadna rímska číslica. Namiesto toho sa používalo slovo označujúce „nič“ (nullae). Prvé systematické štúdium čísel sa zvyčajne pripisuje starovekým gréckym filozofom, konkrétne Pytagorovi a Archimedovi. Avšak podobné štúdium prebiehalo približne v rovnakom čase paralelne v Indii, Číne a Mezoamerike.

V devätnástom storočí bola vyvinutá prvá definícia prirodzených čísel založená na *teórií množín*. V rámci tejto definície je pohodlnejšie zahrnúť nulu (zodpovedajúcu prázdnej množine) medzi prirodzené čísla. Táto konvencia je dnes bežná v teórií množín, logike, diskrétnej matematike a informatike. V iných odvetviach matematiky, ako napr. v teórií čísel. je tento zvyk menej badateľný a častejšie sa používa staršia tradícia, ktorá nezahrňovala nulu ako prirodzené číslo.

Notácie

Matematici používajú zvyčajne na označenie množiny prirodzených čísel symbol veľkého písmena N v latinke (najčastejšie tučné **N** alebo tzv. matematickým tabuľovým fontom $\mathbb{N}$). Táto množina je nekonečná množina, ale spočítateľná. Na predídene nejednoznačnosti, či autor považuje prirodzené číslo za nulu alebo nie sa niekedy pridáva dolný index “0“ v prvom prípade, či horný index “*“v druhom:

$\mathbf{N} = \mathbf{N}_0 = \{ 0, 1, 2, ... \}$; $\mathbf{N}^* = \{ 1, 2, ... \}$.

(Niekedy sa v druhom prípade používa aj horný index “+“.Zápis s horným indexom “*“ sa zvyčajne používa v abstraktnej algebre na označenie tých prvkov okruhov, ku ktorým neexistuje multiplikatívny inverzný prvok, špeciálne v poliach sú to nenulové prvky.)

Formálne definície

Historicky sa matematické definície prirodzených čísel rodili s veľkými ťažkosťami. Peanove axiómy špecifikujú podmienky, ktoré musia spĺňať všetky úspešné definície prirodzených čísel. Isté konštrukcie (ako napr. v teórií množín, teórií modelov) ukazujú, že (aspoň jedna) štruktúra vyhovujúca Peanovým axiómam existuje. Taliansky matematik Giuseppe Peano (1858 – 1932) uverejnil roku 1891 sústavu Peanových axióm, ktoré popisujú všetky vlastnosti prirodzených čísel. V skutočnosti ich iba prevzal z knihy „Čo sú a na čo sú čísla“ nemeckého matematika Richarda Dedekinda (1831 – 1916), vydanej roku 1882. Bolo by teda spravodlivejšie hovoriť o Dedekindových axiómach prirodzených čísel.

Axiómy:

- Číslo 1 je prirodzené.
- Každé prirodzené číslo n má priameho nasledovníka, číslo (n+1).
- Číslo 1 nie je priamym nasledovníkom nijakého prirodzeného čísla.
- Ak je priamym nasledovníkom dvoch prirodzených čísel to isté prirodzené číslo, potom sú tieto dve čísla zhodné (vzájomne sa rovnajú).
- Nech isté tvrdenie (vlastnosť) platí pre číslo 1. Ak z jeho platnosti pre číslo n vyplýva platnosť pre číslo (n+1), teda pre priameho nasledovníka čísla n, potom je tvrdenie platné pre všetky prirodzené čísla. Ináč povedané, ak tvrdenie platí pre číslo 1, platí aj pre číslo 2. Ak platí pre číslo 2, platí aj pre 3. Ak platí pre 3, platí aj pre 4 atď.

Vlastnosti

Sčítanie a násobenie prirodzených čísel sa riadi piatimi základnými pravidlami:

1. Pravidlo zameniteľnosti poradia sčítancov (komutatívnosť sčítania):

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

2. Pravidlo ľubovoľného združovania sčítancov (asociatívnosť sčítania):

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

3. Pravidlo zameniteľnosti činiteľov pri násobení (komutatívnosť násobenia):

$$\mathbf{a\ .\ b = b\ .\ a}$$

4. Pravidlo ľubovoľného združovania činiteľov pri násobení (asociatívnosť násobenia):

$$\mathbf{(a\ .\ b) = a\ .\ (b\ .\ c)}$$

5. Pravidlo násobenia súčtu dvoch alebo viacerých sčítancov (distributívnosť násobenia vzhľadom na sčítanie):

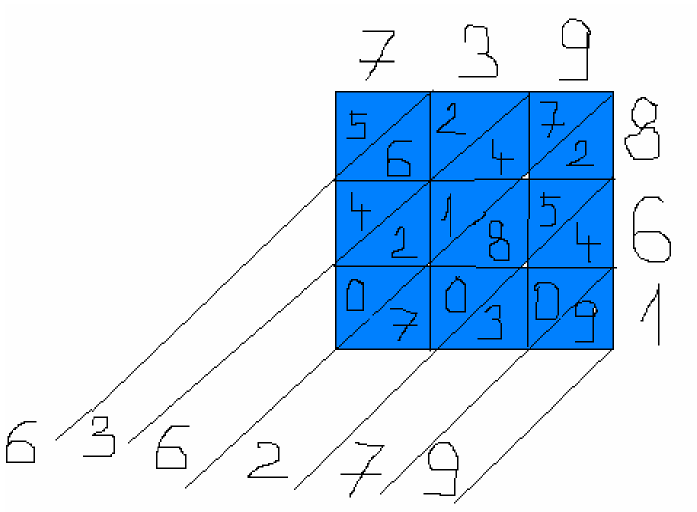
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ukážka postupu sčítania z roku 1540:

$$\begin{array}{r} 9279 \\ 389 \\ \underline{479} \\ 27 \\ 22 \\ 9 \\ \underline{9} \\ 10147 \end{array}$$

Prenos desiatok do ďalšieho stĺpca označovali ako „zapamätaj si.“ Aby naň nezabudli, vedľa tabuľky sčítania robili bodku.

Ukážka násobenia, ktorú uvádza čínska kniha z roku 1593 ako maticový spôsob násobenia označovaný ako „žalúzia.“



Latinský výraz pre násobenie (multiplicatio) vznikol zložením slov multum (veľa) a plicare (skladať). Ide o preklad staršieho gréckeho výrazu polyplésiásein, ktorý používal ešte Euklides. Matematik Luca Pacioli vydal roku 1494 knihu Summa a opísal v nej osem vtedy známych spôsobov násobenia. Niektoré by nám pripadali veľmi nezvyčajné – napríklad „gelosia“ (žalúzia) znázornená na obrázku. Tento spôsob sa používal v starej Indii, pričom zápis robili na doštičke posypanej pieskom. Škót John Napier (1550 – 1617) ho upravil do podoby počítacích pravítok, ktoré sa v Európe rýchlo rozšírili.

Zovšeobecnenia

Z dvoch rôznych použití prirodzených čísel v bežnom živote sa objavujú ich dve rôzne zovšeobecnenia: ordinálne čísla (ordinály), ktoré sa používajú na popísanie pozície prvku v usporiadanej postupnosti a kardinálne čísla, ktoré používame na určenie veľkosti danej množiny.

Pri konečných postupnostiach sú obidve zahrnuté v prirodzených číslach.