Katolícka univerzita v Ružomberku

Pedagogická fakulta

CANTOROVA MNOŽINA

Katarína Popjaková

Matematika – Informatika

4. ročník

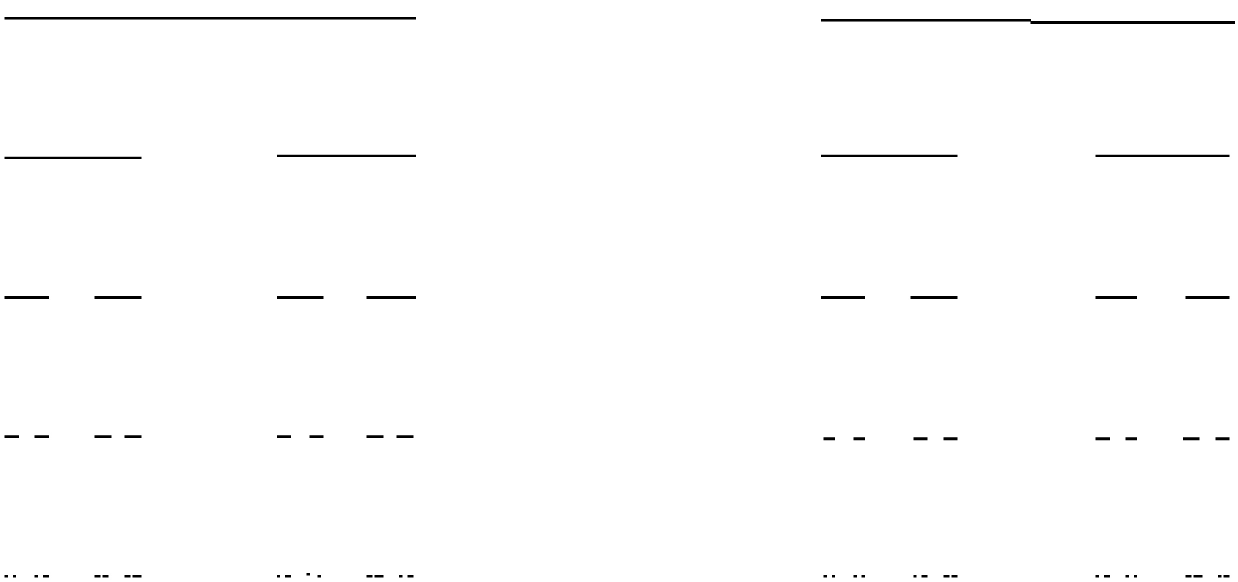
2006/2007

George Cantor (1845-1918) bol nemecký matematik na Univerzite v Halle, kde sa venoval základnej práci v oblasti matematiky, ktorú v súčasnosti nazývame *teóriou množín*. Cantor rozpoznal, že nekonečné množiny majú rôzne veľkosti, rozlišoval medzi spočítateľnými a nespočítateľnými množinami a dokázal, že množina všetkých racionálnych čísel Q je spočítateľná, kým množina všetkých reálnych čísel R je nespočítateľná, a teda v istom zmysle väčšia.

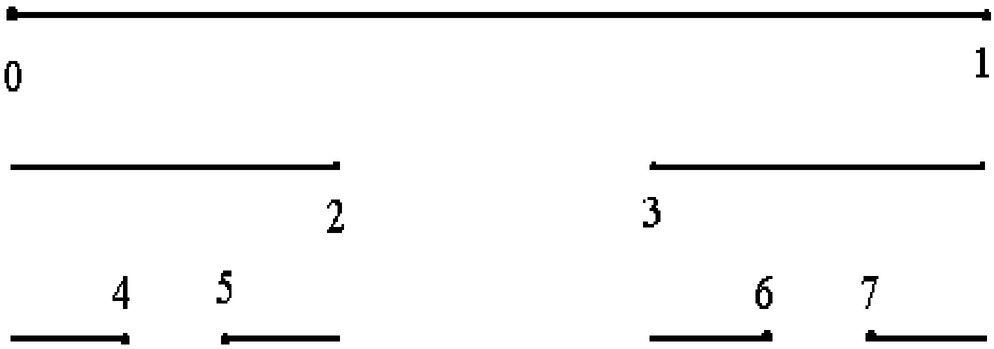
Základná Cantorova množina je nekonečná množina bodov v uzavretom intervale [0,1]. Môžeme to interpretovať ako množinu presných čísel, napríklad 0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27, 2/27, … . Začína sa na intervale [0,1]. Potom sa tento interval rozdelí na tri zhodné časti, pričom vynecháme stredný interval. Takto sa pôvodný interval zmení na dva intervaly [0,1/3] a [2/3,1] o dĺžke 1/3 každej časti. Znovu zopakujeme postup na intervaloch [0,1/3] a [2/3,1], kde musíme dodržať pravidlo vynechania strednej časti intervalov o dĺžke 1/9. Takýmto spôsobom pokračujeme ďalej do ľubovoľnej úrovne. Na počiatku bol iba jeden interval, ktorý sa v druhom kroku zmenil na dva, v treťom na štyri, v štvrtom na osem atď. Z toho môžeme odvodiť nasledujúce pravidlo:

v n-tom kroku *je* 2^n *intervalov o dĺžke* $1/3^n$

Čo je vlastne Cantorova množina? Je to množina bodov, ktoré predstavujú koncové body: 0, 1, 1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, 1/27, 2/27, … .



Netreba zabúdať, že body, ktoré vznikajú v nasledujúcich krokoch sú potomkami svojich predchodcov. Týmto spôsobom sa prevádzajú koncové body od rodičov k potomkom. Názorne si ukážeme koncové body pre prvé dva stupne (0-2).



Znázornenie koncových bodov pre Cantorovu množinu

Ak chceme určiť počet koncových bodov, tak to nebude ľahké, nakoľko počet stupňov môže pokračovať donekonečna. Musíme pritom vylúčiť body, ktoré nie sú koncové body.

Nasledujúcim postupom by to bolo možné. Využijeme pritom poznatky o desiatkovej sústave. Začnime s metrom, ktorý je rozdelený na decimetre. V prvom kroku vystrihneme celú časť, ktorá prislúcha decimetru číslo 5. Ostane deväť decimetrov, z ktorých v druhom kroku odstránime znovu centimeter číslo 5. Následne v kroku tri, z 81 centimetrov odstránime v každom milimeter číslo 5. Postup opakujeme aj ďalších krokoch. Docielime to, že v žiadnom kroku sa nevyskytne číslica 5. Uvedený postup je pozoruhodný tým, že sa postupne prejavuje vo všetkých krokoch, čo sa podobá Cantorovej množine. Na to, aby sme mohli simulovať Cantorovú množinu pomocou desiatkovej sústavy, tak uvedený postup je potrebné vykonať pre číslice 3, 4, 5 a 6. Výsledok je podobný Cantorovej množine, ale presný popis je možné dosiahnuť iba pomocou trojkovej sústavy.

Trojková sústava obsahuje číslice 0, 1, 2. Ako príklad uvedieme niekoľko čísel, ktoré sú v trojkovej sústave:

Desiatkovo	**Rozvoj so základom 3**	**Trojkovo**
4	$1.3^1 + 1.3^0$	11
17	$1.3^2 + 2.3^1 + 2.3^0$	122
0,333...	1.3^{-1}	0,1
0,5	$1.3^{-1} + 1.3^{-2} + 1.3^{-3} + \dots$	0,111...

Tab. 6 Trojková reprezentácia desiatkových čísel.

Vo všeobecnosti môžeme ľubovoľné číslo z intervalu [0,1] zapísať v tvare

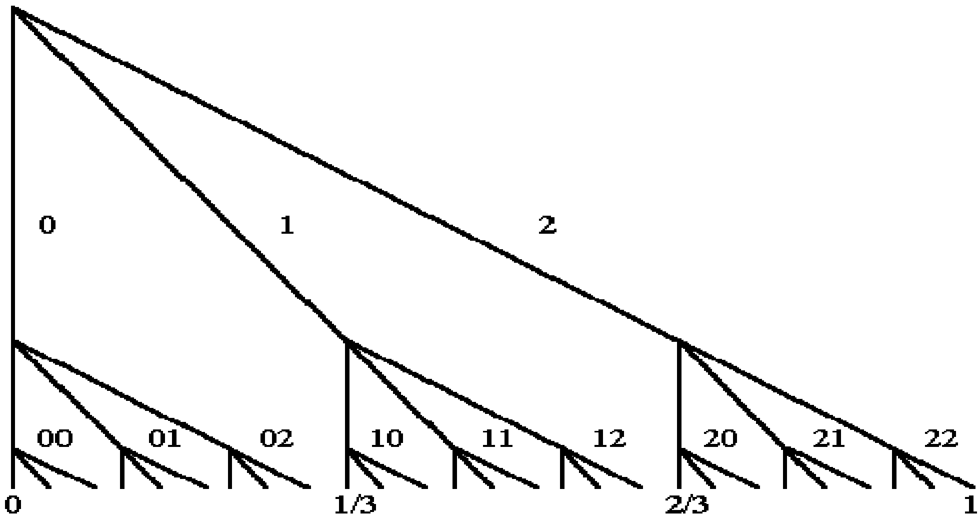
$x = a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2} + a_3.10^{-3} + \dots$, (22)

kde a_1, a_2, a_3, …sú čísla {0, 1, 2, …, 9} pre desiatkovú sústavu. Uvedený zápis nazývame desiatkový rozvoj, ktorý môže byť ukončený (pre číslo 1/4) alebo neukončený (pre číslo 1/3).

Vráťme sa však späť k trojkovej sústave, pomocou ktorej je možné presne popísať Cantorovú množinu. Ľubovoľné číslo v trojkovej sústave zapíšeme takto:

$x = a_1.3^{-1} + a_2.3^{-2} + a_3.3^{-3} + a_4.3^{-4} \ldots$, (23)

Premenné $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sú čísla {0, 1, 2}. Na popis čísel Cantorovej množiny môžeme zostrojiť strom trojkovej sústavy, z ktorého odvodíme Cantorovú množinu.



Strom, ktorý predstavuje zobrazenie trojkovej sústavy.

Cantorová množina C je množina bodov z intervalu [0, 1], pre ktoré je trojkový rozvoj neobsahuje číslicu 1. Táto definícia eliminuje problémy, ktoré sa vyskytujú pri geometrickom generovaní Cantorovej množiny. Ako príklad si vyberieme čísla 2/3 a 2/9. Ich reprezentácia v trojkovej sústave je 0.2 a 0.02. Neobsahujú číslicu 1. Pre číslice 1/3 a 1/9 je to trochu inak. Číslo 1/3 je v trojkovej sústave 0,1 a číslo 1/9 je 0,01. Tieto čísla obsahujú číslicu 1. Ich zápis môže byť tiež iný. Trojkové číslo 0,0222… je v skutočnosti taktiež 1/3. Pre 1/9 to bude trojkové číslo 0,00222… . Vyhli sme sa použitiu číslice 1. Ale pokiaľ by sme chceli nájsť číslo 1/3+1/9, tak jeho reprezentácia je 0,10222…, čo už nie je možné zapísať tak, aby sme nepoužili číslicu 1 a teda toto číslo nie je z Cantorovej množiny.

Cantor dal matematike základ, na ktorom dodnes stavajú všetky jej disciplíny.
„Nikto nás nesmie vykázať z Raja, ktorý pre nás vytvoril Cantor.“

David Hilbert

Použité zdroje:
http://hornad.fei.tuke.sk/predmety/pg/Fraktaly/Cantorova.htm
http://sk.wikipedia.org/wiki/Georg_Ferdinand_Cantor