Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta

PARADOXY NEKONEČNA
(História matematiky)

Róbert Podolák

4. ročník
Mat-Inf

PARADOXY NEKONEČNA

BERNARD BOLZANO

„Ide teda už len o to, či budeme schopní určiť, čo je vlastne nekonečno,
a to výkladom toho, čo sa nazýva nekonečným množstvom.
Tak by tomu bolo, keby sa ukázalo, že prísne vzaté neexistuje nič iné,
ako práve množstvo, na ktorý sa dá pojem nekonečna vlastne aplikovať,
to je keby sa ukázalo, že nekonečnosť je iba určitou skladbou množstva,
alebo že všetko, čo prehlasujeme za nekonečné, nazývame tak len preto,
pokiaľ na ňom pozorujeme skladbu, ktorá sa dá vnímať ako nekonečné množstvo.
Zdá sa mi, že tomu tak skutočne je. (Paradoxy nekonečna)“

Narodil sa 5. 10. 1781 v Prahe v rodine obchodníka talianského pôvodu a jeho matka bola pražská nemka. Po absolvovaní nemeckej základnej školy a piaristického gymnázia vstúpil v roku 1796 do trojročného „filozofického kurzu“, kde boli jeho učiteľmi mj. S. Vydra a F. J. Gerstner. Tu sa prejavil jeho mimoriadny talent na matematiku. Osobitne sa zaujímal hlavne o tie oblasti matematiky, kde se matematika spája s filozofiou.

„ ...vo vedách i vo všetkých ostatných oblastiach neprínášajú pokrok tí, ktorí krčovite zotrvávajú na ustálenom stave vecí, ale tí, ktorí sa usilujú o lepšie, tí, ktorí sa odvážia stále meniť všetko, čo nie je v poriadku.“

Pri nejakom pohľade berieme na vedomie predovšetkým to, čo je evidentné, to znamená, že vidíme bezprostredne, čo nevyžaduje dôkaz. Avšak k tomu, aby sme sa nejakým spôsobom vedeli podívať, musíme najprv vidieť to, čo je pri takomto pohľade jednoznačné. Preto nový pohľad sa nám vždy otvára spolu s novými možnosťami a často až s ich existenciou.Veľké matematické výsledky vznikajú z možností. V tomto smere vystupuje aj Bernard Bolzano, ktorý sa snaží o presadenie nových možností, nového pohľadu na matematiku.

Následujúca Descartova úvaha je dodnes považovaná za jediný možný počiatok každého zodpovedného filozofovania, lebo odhaľuje jedinú neotrasiteľnú istotu, na ktorej môžeme bezpečne stavať:

Ak prehlásime za klamné a ak odmietneme všetko to, o čom sa dá pochybovať, môžeme ľahko predpokladať, že nieje žiaden Boh, žiadne nebo, že nie sú žiadné telesá a že my sami nemáme žiadne ruky, ani nohy, ani žiadne telo; ale nemôžeme predpokladať, že my, ktorí takto myslíme, neexistujeme. Je totiž protirečením, myslieť si, že to, čo myslí, neexistuje v tej chvíli, keď myslí. Preto tvrdenie „Myslím, teda som“ (Ego cogito, ergo sum) je prvé a najistejšie zo všetkých poznaní, ku ktorému dospeje každý, kto metodicky filozofuje.

Práve oslnivosť tejto Descartovej úvahy zabránila, aby do všeobecného povedomia vošlo, že na iný, niemenej pevný základ filozofovania upozornil práve B. Bolzano. Ten bol práve všetkými vedúcimi osobnosťami západoeurópskej filozofie a vedy prehliadaný. Nebol však prehliadnutý kvôli namyslenosti vtedajších filozofov a vedcov ale preto, lebo jeho myšlienky – a to sa týka skoro všetkých jeho diel – neboli schopní pochopiť. A kto často nie je chápaný býva často nežiadúci, neobľúbený a inak to nebolo ani v prípade Bolzana. Veľkosť diela, ktoré vytvoril začala vychádzať na povrch až v 20. storočí. O toľko totiž jeho myslenie predbehlo dobu.

Základ filozofie v Bolzanovom poňatí:

Bolzano narozdiel od Descartesa a jeho prívržencoch nachádza nepochybnú a naviac východziu istotu v krajine pravdy. Aby sme mohli spolu s Bolzanom tuto istotu zdieľať musíme si najskôr vysvetliť ním zavedený pojem, ktorý v tomto prípade hrá kľúčovú úlohu. Je ním pojem „pravda o sebe“ s ktorým si vtedajší filozofovia nedali prácu, aby mu dokonale porozumeli.
(pozn. Na druhej strane nieje ľahké tento pojem pomocou niekoľkých viet vysvetliť)

V prvom diele svojho najobsiahlejšieho spisu Vedoslovie, alebo pokus o vonkajší a prevažne nový výklad logiky so stálym zreteľom k predchádzajúcim spracovateľom, sa Bolzano snaží porozumenie pre pojem „pravdy o sebe“ otvoriť nasledujúcim výkladom:

Rozumiem teda pravdou o sebe každú ľubovoľnú vetu, ktorá vypovedá niečo tak, ako to skutočne je, pričom nechávam nerozhodnuté, či bola táto veta niekým skutočne myslená a vyslovená, alebo nie. Či už je to tak alebo inak, táto veta má podľa mňa ničmenej mať meno „pravdy o sebe“, ak len to, čo veta vypovedá, je tak ako to veta vypovedá, alebo inými slovami, ak tomu predmetu, o ktorom hovorí, skutočne patrí to, čo mu prisudzuje. Tak napríklad množstvo kvetov, ktoré minulú jar na sebe mal istý, na určitom mieste stojaci strom, predstavuje určité číslo, aj keď ho nikto nevie, veta ktorá toto číslo udáva, je mnou uznaná ako objektívna pravda, aj keď ju nikto nepozná. Aby u mojich čitateľov nezostala ani najmenšia pochybnosť o tom, či ma úplne pochopili, ak ide o tak dôležitý pojem, ako je tento, pripájam nasledújúce poznámky, ktoré vlastne obsahujú iba určité ľahko pochopiteľné poučky o pravdách o sebe...

Pravdy o sebe nemajú skutočné bytie, to znamená, nie sú ničím takým, čo by mohlo byť na nejakom mieste alebo v nejakom čase alebo akýmkoľvek iným spôsobom ako niečo skutočné. Poznané alebo myslené pravdy majú ovšem skutočné bytie v určitom čase, a to v mysli nejakej bytosti, ktorá ju poznáva alebo myslí, teda bytie ako určité myšlienky, ktoré v jednom okamihu vznikli a v inom zanikli. Avšak pravdám samým, ktoré tvoria látku týchto myšlienok nemôžeme pripisovať žiadne bytie....

Teda musí byť logikovi dovolené hovoriť o pravdách o sebe rovnakým právom, akým hovorí geometer o priestoroch o sebe (to znamená o obyčajných možnostiach určitých miest), bez toho aby myslel na ich vyplnenie hmotou.

Keď som vyjadril, že „pravda o sebe“ je veta, ktorá hovorí niečo tak, ako to v skutočnosti je tak sa nedajú chápať všetky tu použité slová v ich pôvodnom ani v ich bežnom význame, ale skôr v ich vyššom význame, abstraktnejšom význame. V akom, je zrejmé z pripojeného dodatku, že chcem ponechať neurčené, či bola taká veta niekým myslená alebo vyslovena alebo nie.

Aby Bolzano mohol s aktuálnym nekonečnom pracovať, musel najskôr dokázať, že takého nekonečno vôbec existuje. Bolzano k tomu práve využíva vyššie uvedený pojem „pravda o sebe“. Prave z tohto pojmu Bolzano dokazuje aktuálne nekonečnú množinu a to takýmito úvahami:

Vetou „existuje aspoň jedna pravda o sebe“ je zachytená jedna nepochybná, úplne neotrasiteľná, večná pravda o sebe. Keby azda táto veta niekedy pravdivá nebola, bola by pravdivá veta „neexistuje žiadna pravda o sebe. Toto však už nie je len zárodok východzích istot filosofovania, ale večná (na rozdiel od Descartesa) východzia Bolzanova istota sama. Hneď potom keď dokázal existenciu aspoň jednej večnej pravdy o sebe, Bolzano dokazuje že takýchto právd je nekonečne veľa. Dôkaz v trocha podrobnejšej podobe vyzera asi takto:

Označme P1 vetu „existuje aspoň jedna pravda o sebe“, o ktorej sme ako prvej dokázali, že zachytáva večnú pravdu o sebe. Ďalej môžeme postupne vytvárať vety P1, P2, P3, …. ktoré zachytávajú rôzne večné pravdy o sebe, a to tak, že Pn+1 je veta „existuje aspoň jedna pravda o sebe, ktorá je rôzna od všetkých právd zachytených vetami P1, P2, P3 …. Pn“. Predpokladajme najskôr, že Pn+1 nezachytáva žiadnu večnú pravdu o sebe, to znamená, že Pn+1 je niekedy nepravdivá.V takomto prípade je však pravdivá veta „neexistuje žiadna iná pravda o sebe ako taká, ktorá je zachytená v niektorej z viet P1, P2, ….. Pn“. Označme túto pravdu písmenom R. Dokážeme, že R zachytáva inú pravdu ako ktorákoľvek z viet P1, P2, ….. Pn, čo bude spor. Nech tomu tak nieje. Zrejme R zachytáva tu istú pravdu ako Pk+1 (zrejme k<n) Veta Pk+1 však tvrdí, že existuje ešte iná pravda o sebe ako taká, ktorá je zachytená niektorou z viet P1, P2, P3..... Pk. Naproti tomu veta R tvrdí, že neexistuje iná pravda o sebe ako tá, ktorá je zachytená niektorou z viet P1, P2, P3..... Pn. Následkom toho vety R a Pk+1, zachytávajú rôzne pravdy. Zostáva len dokázať, že Pn+1 zachytáva inú pravdu o sebe ako ktorákoľvek z viet P1, P2, P3..... Pn. Zrejme Pn+1 zachytáva inú pravdu ako P1. Nech k je opäť najmenšie prirodzené číslo také, že

Pn+1 zachytáva tu istú pravdu ako Pk+1 (zrejme k<n). Veta Pn+1 však tvrdí, že exisuje aj iná pravda ako tá, ktorá je zachytená vetou Pk+1, následkom čoho obidve vety zachytávajú iné pravdy o sebe, čo je spor. A tým je dôkaz ukončený.

V spise Paradoxy nekonečna, ktorý bol uverejnený v roku 1851, teda až po Bolzanovej smrti, uvádza ešte iný, jednoduchší dôkaz toho, že existuje nekonečne veľa večných právd o sebe. Dôkaz znie takto:

P1 označuje opäť tú istú vetu ako v predchádzajúcom prípade. Pn+1 však označuje vetu „vety P1, P2, …., Pn zachytávajú večné pravdy o sebe“. Okamžite je jasné, že ak zachytáva P1, P2, ….., Pn večné pravdy o sebe, tak aj Pn+1 zachytáva večnú pravdu o sebe. Pritom Pn+1 zachytáva inú pravdu o sebe ako ktorákoľvek z viet P1, P2, P3...... Pn, lebo predmeto tvrdenia Pn+1 sú pravdy zachytené vetami P1, P2, P3,..... Pn, pričom predmetom tvrdení Pk, kde k je menšie alebo rovné n, je mienka týchto právd. Bolzano výslovne upozorňuje, že ak vezmeme nejakú pravdu P, tak veta „P je pravdivá“ je odlišná od P.

Dodatok: Dokončenie dôkazu existencie nekonečnej množiny. Vyššie uvedeným postupom sme podali návod na vytváranie ďalších a ďalších právd o sebe. Je teda obor všetkých právd o sebe nekonečný, môže však byť iba nekonečný potencionálne. K tomu aby sme mohli obor všetkých právd o sebe považovať za aktuálne nekonečný, je nutné ukázať, že všetky tieto pravdy už existujú a to každá jednotlivo. Inými slovami je nutné ukázať, že uvedený návod nieje návodom na vytváranie stále ďalších a ďalších právd, ale návodom na to, ako sa môžeme so stále ďalšími a ďalšími pravdami stretávať. Bolzano však uvádza, že Boh pozná všetky pravdy o sebe ako celok a aj ako každú jednotlivo, lebo práve toto je jednou z jeho charakteristických vlastností. Bez tohto dodatku by nebol jeho dôkaz existencie nekonečnej množiny úplný.

Ak malo byť nekonečno základom nového významu neurčitej matematiky, tak ovšem bolo nutné tento jav najskôr riadne vysvetliť. Novo objavené skutočnosti bolo potrebné podriadiť rozumu, teda vysvetliť to, čo bolo uvádzané ako príznaky sporu (nie priamo ako spor), iba ako spor zdajúci sa, teda ako paradox. Prvý kto sa s takto novo vzniknutými problémami stretol bol Bolzano. Preto tiež spis, ktorý v roku 1851 vydal z pozostalostí B. Bolzana František Přihonský, nesie názov Paradoxy nekonečna.

Aby bolo možné vytvoriť zhodu medzi aktuálne nekonečným množstvom a Euklidovými axiomami, ktorých vplyv na porozumenie javu veľkosti bol nesmierny, bolo nutné obrátiť v paradox predovšetkým známy spor objavený Galileom. Pripomeňme, že v tomto spore ide o to, že všetkých štvorcov prirodzených čísel by malo byť menej a zároveň rovnako ako všetkých prirodzených čísel. Tento prípad bol kľúčovým, lebo iné spory boli väčšinou len obmenou tohto. Zavedením nekonečných množín, ktoré z neústrojných zoskupení nekonečne veľa nejakých objektov vytvárajú – často len umelo – ústrojné celky, nadobudol tento spor ešte hrozivejšiu podobu. Teraz už totižto tak jednoduché nevidieť prítomnosť Eukleidových axiom v tomto spore, lebo išlo o množiny, teda o jasné celky a nie o množstvo nejakých celkov.
Pri prevracaní tohto sporu v paradox nešiel Bolzano tak ďaleko ako Galileo Galilei, ktorý prehlásil pojmy vypracované pre javy konečné za úplne nevhodné k zachyteniu javou nekonečných a tým vlastne cestu k aktuálnemu nekonečnu ľuďom uzavrel. Boh, s ktorého pohľadom Bolzano spojil pohľad svoj, bol práve tým neobyčajne poľudšteným barokným Bohom, ktorý síce pozoroval reálny aj duchovn svet pohľadom neporovnateľne dôkladnejším, pozornejším a priezračnejším, nie však pohľadom zásadne odlišným a človeku neprístupný. Bolzanovi teda išlo o prevrátenie tohto sporu na paradox, pri ktorom by zneváženie javov do ňho vstupujúcich bolo pokiaľ možno čo najmiernejšie. Preto sa snažil rozšíriť pôsobnosť pojmov vypracovaných pre javy konečné aj na javy nekonečné a tam ich pôsobnosť vhodne rozostriť.

Z následujúcich Bolzanových slov uvedených v Paradoxoch nekonečna jasne vyplýva, že jeho postoj voči tomuto sporu nemal nič spoločného s umrtvujúcim postojom Galilea, ale že to bol postoj, ktorý žiaden spor nepripúšťa, plný očakávaní, ktoré paradoxy predznamenávajú. Rovnako je odtiaľ zrejmé, že Bolzano nemal v úmysle chápať tento paradox ako nejakú podivnú jedinečnosť, ale naopak ako čosi, čo je práve pre nekonečné množiny príznačné a čo má pre ich ďalšie štúdium veľký význam.

Prejdeme teraz k úvahe o nanajvýš pozoruhodné zvláštnosti, ktoré sa môžu vyskytnúť vo vzťahu dvoch množín, ak sú obidve nekonečné, dokonca ktorý sa vlastne vyskytuje vždy, avšak bola doposiaľ prehliadaná na škodu pre poznanie mnohých dôležitých právd metafyzických, fyzikálnych ako aj matematických, a ktoré aj teraz, keď ich vyslovím, budú pokladané za tak paradoxné, že by bolo veľmi potrebné sa pri úvahe o nich trocha dlhšie zdržať. Tvrdím totižto: dve množiny, obidve nekonečné, môžu byť voči sebe v takom vzťahu, že ich je možné na jednej strane spojiť do dvojíc, každú vec, patriacu jednej z nich, s vecou z druhej z nich, tak, aby vôbec žiadna vec v obidvoch množinách nezostala bez spojenia vo dvojici a taktiež aby sa nevyskytovala vo dvoch alebo viacerých dvojiciach; a pritom je na druhej strane možné, aby jedna z obidvoch množín obsahovala druhú ako svoju časť, takže množstvo, ktoré tieto množiny predstavujú, je k sebe v najrozmanitejších pomeroch, ak považujeme veci v *nich za rovnaké, to je za jednotky.*

Aby ukázal, že sa tento jav netýka len prirodzených čísel, uviedol Bolzano iný príklad ako ten, na ktorý upozornil Galileo Galilei.

Vezmime dve ľubovoľné čísla, napríklad 5 a 12. Potom je jasné, že množina čísel (racionálnych alebo reálných), ktoré sú medzi nulou a 5, je nekonečná práve tak, ako množina čísel medzi nulou a 12;a práve tak isto je nutné prehlásiť druhú množinu za väčšiu ako prvú, pretože prvá je bezpochyby len jej dielom. Ak dosadíme na miesto čísel 5 a 12 akékoľvek iné čísla, musíme dokonca usúdiť, že dané dve množiny nezostávajú v tom istom vzájomnom pomere, ale naopak vstupujú do najrozmanitejších pomerov. Avšak číslo medzi nulou a 5 a ak určíme vzťah medzi x a y rovnicou 5y = 12x, je také y číslo ležiace medzi 0 a 12; a naopak , kedykoľvek je y medzi nulou a 12, je x medzi nulou a 5. Z danej rovnice tiež vyplýva, že ku každej hodnote x pripadá jediná hodnota y a naopak. Z obidvoch tvrdení je však jasné, že ku každému číslu x z množiny čísel medzi nulou a 5 existuje v množine čísel medzi nulou a 12 jedno číslo y, a tieto čísla sa dajú spojiť do dvjíc tak, aby žiadna z vecí, z ktorých sú tieto množiny zložené nebola bez takéhoto spojenia. A že tiež ani jedna nevystupuje v dvoch alebo viacerých dvojiciach.

A tým, čo bolo pôvodne považované za spor sa prevrátilo v paradox a to zmenou pohľadu na konflikt týchto javov. Nepriazeň voči aktuálnemu nekonečnu, ktorú vyvolával konflikt týchto javov vysvetlovaný ako spor, sa zmenil v priaznivé očakávanie nielen bližšieho vysvetlenia tohto paradoxu ale aj dôsledkov z neho vyplývajúcich. Samotná zmena pohľadu totiž rozostrila porozumenie pre jav veľkosti v prípade nekonečných množín, na čo Bolzano upozornil následujúcimi slovami:

Paradox, ten ktorý je založený na týchto tvrdeniach – čo nechcem vôbec popierať – vyplýva jedine z tej okolnosti, že daný vzájomný vzťah, ktorý sme našli u porovnávaných množinách, spočíva v tom, že sa nám podarí zostaviť ich prvky do dvojíc tak, ako sme sa už viackrát zmienili, stači iba za všetkých okolností k tomu, aby sme ich mohli prehlásiť za úplne zhodné aj z hľadiska množstva ich prvkov, ak sú tieto množiny konečné. Dve konečné množiny sú si totiž aj s ohľadom na svoje množstvo vždy rovné, ak sú ovšem tak zložené, že ku každému prvku a jednej z nich sa nám podarí nájsť prvok b z druhej množiny a spojiť ich do dvojíc tak, že v žiadnej z obidvoch množín nezostane ani jeden prvok, ku ktorému by sa nedal nájsť odpovedajúci prvok v druhej množine, a že tiež neexistuje vec, ktorá by sa objavila vo dvoch alebo viacerých dvojiciach. To vyvoláva zdanie, že by tak tomu malo byť aj keď máme namiesto konečných množín množiny nekonečné. Tak sa to zdá, hovorím; avšak pri hlbšej úvahe sa ukazuje, že tomu tak vôbec nemusí byť, lebo dôvod prečo to tak je u všetkých konečných množin je, spočíva práve v ich konečnosti, a teda odpadá u množín nekonečných......

Stručné zhrnutie:

Na nekonečných množinách sa jav veľkosti ukazuje v dvoch rôznych podobách, ktoré spolu však istým spôsobom súvisia (čo už je preskúmané). Nejde ich však bezmyšlienkovyto zamieňať, aj keď k tomu zvádza skutočnosť, že na konečných množinách obidve tieto podoby javu veľkosti splývajú.
To by však nemalo byť nejako prekvapivé, lebo aj na mnohých telesách sa ukazujú rôzne, spolu len málo súvisiace podoby javu veľkosti; napr. Jedna u objemu, iná u tiaže, tvrdosti, a podobne.
Tá podoba javu veľkosti, ktorá sa opiera o siedmu Euklidovu axiomu, ktorý tvrdí „čo sa navzájom kryje navzájom rovné je“ obdržala neskôr veľmi vhodný názov mohutnosť množiny. Množiny A, B majú rovnakú mohutnosť práve vtedy, keď existuje vzájomné jednoznačné zobrazenie z jednej množiny na druhú.

Oproti tomu, tá podobo javu veľkosti množín, ktorá sa opiera o ôsmu Euklidovu axiomu, podľa ktorej, „ celok je väčší ako diel“, viedla k zavedeniu pojmu podmnožiny. Množina A je podmnoužinou množiny B, ak každý prvok množiny A je tiež prvkom množiny B. Tento vzťah medzi množinami obdržal názov inklúzia. Ak A je vlastná množina B, to znamená je podmnožinou B a existuje prvok množiny B, ktorý nieje prvkom množiny A, tak množina B je pochopiteľne väčšia ako množina A.

V tom, že vlastná podmnožina A nekonečnej množiny B môže mať rovnakú mohutnosť ako množina B, nieje žiaden spor, podobne ako nieje žiaden spor v tom, že telese o menšom objeme môže byť rovnako ťažké ako teleso s väčším objemom.

Literatúra:

Petr Vopěnka, *Horizonty nekonečna*, Vize 97, Praha 2004
Petr Vopěnka, *Vyprávení o kráse novobarokní matematiky*, Práh, Praha 2004

Internet:

http://www.phil.muni.cz/fil/index.html
http://sk.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano
http://www.uski.sk/frames_files/ran/2005/cl050106.htm
http://www.sweb.cz/info_historik/2001-04/2001-04-08.htm