

## Kochova snehová vločka

### Helge von Koch



Helge von Koch

**Niels Fabian Helge von Koch** (25. január 1870 Stockholm – 11. marec 1924 Stockholm) bol švédsky matematik, podľa ktorého bola pomenovaná Kochova vločka, jedna z prvých popísaných fraktálnych kriviek.

Narodil sa v aristokratickej rodine – jeho dedko (Nils Samuel von Koch, 1801–1881) bol švédskym justičným kancelárom, jeho otec (Richert Vogt von Koch, 1838–1913) bol dôstojníkom švédske kráľovské jazdeckej gardy. Helge získal 26. mája 1892 na Stockholmské univerzite doktorát z matematiky za dve práce týkajúce sa riešenia systémov diferenciálnych rovníc. V júli 1911 získal na Stockholmské univerzite post profesora matematiky.

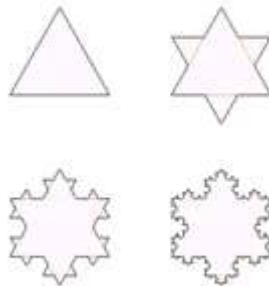
Dnes je jeho meno známe hlavne vďaka po ňom pomenovanej fraktálnej krivke, ktorou sa prezentoval v práci *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes plane*, prezentované v roku 1906. V tejto práci dokázal, že tato krivka je spojitá, ale nemá v žiadnom svojom bode tečnu.



Kochova krivka

**Kochova krivka** je matematická krivka, jedna z prvých popísaných fraktálnych kriviek. Známa je ako súčasť **Kochovej vločky**, vytvorenej s troch spojených Kochových kriviek. Krivka je pomenovaná po švédskom matematikovi Helge von Kochovi, ktorý ju popísal vo svojej práci *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire* z roku 1904.

### Tvorba Kochovy krivky



Prvé štyri iterácie Kochovej vločky

Kochova krivka vznikne nekonečným opakovaním jednoduchého postupu. Na začiatku je prostá úsečka (v prípade Kochovej vločky rovnostranný trojuholník tvorený troma takými úsečkami). V každom kroku sa potom prevedie nasledujúci:

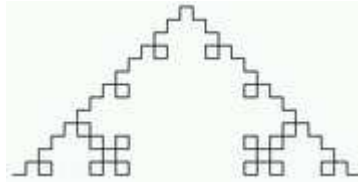
1. Úsečka sa rozdelí na tretiny.
2. Nad prostrednou tretinou sa zostrojí rovnostranný trojuholník.
3. Základňa trojuholníka (bývalá prostredná tretina úsečky) sa odstráni.

Tým sa z pôvodnej úsečky stane krivka zložená so štyroch úsečiek (resp. z trojuholníka sa stane šesťcípá hviezda) a postup sa rekurzívne opakuje s každou takto vzniknutou úsečkou.

Kochova krivka vznikne ako limita pri opakovaní tohto postupu do nekonečna. Jej dĺžka je nekonečná, alebo sa v každom kroku predĺži vždy o tretinu – z troch častí úsečky vzniknú štyri rovnako dlhé. Z toho vyplýva, že v kroku  $n$  bude dĺžka krivky  $(4/3)^n$  dĺžka pôvodnej úsečky, Hausdorffova dimenzia Kochovy krivky je totiž  $\log 4 / \log 3 \cong 1,26$  (tj. krivka zaplňuje priestor viac než sama priamka s dimenziou 1, ale nezaplňuje ho úplne ako napríklad Peanova krivka s dimenziou 2).

Kochova krivka je spojitá, ale v žiadnom bode nemá tečnu. Kochovu krivku možno tiež definovať ako systém iterovaných funkcií (IFS).

## Modifikovaná verzia

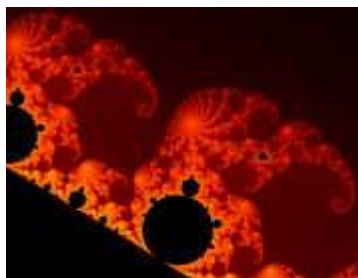


Modifikovaná Kochova krivka používajúca štvorce namiesto trojuholníkov (po troch iteráciách)

**Kochova vložka** (niekde tiež **Kochov ostrov**) vzniká tým, že sa na počiatku pracuje s rovnostranným trojuholníkom namiesto jediné úsečky, výsledkom je teda plošný fraktálny útvar. Obsah takého útvaru je (narozdiel od jeho obvodu) konečný: V každom kroku sa síce plocha zväčšuje, ale pridávané trojuholníky sú čím ďalej menší a výsledkom je konvergentný geometrický rad. Obsah Kochovy vložky je rovný  $\frac{8}{5}$  obsahu pôvodného trojuholníka. U Kochovy vložky teda nekonečne dlhá krivka ohraničuje konečnú plochu.

Miernou modifikáciou pravidiel je možno vytvoriť mnoho podobných kriviek, napr. použitím štvorcov namiesto trojuholníkov či **Kochova antivložka**, u ktorej trojuholníky smerujú dovnútra pôvodného trojuholníka a obsah fraktálu tak znižuje. Eric Haines tiež vytvoril trojrozmernu verziu Kochovej vložky.

## Fraktál



Detail Mandelbrotovho množiny, jedného z najznámejších fraktálov

**Fraktál** je geometrický objekt, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

- je sebestopodný – znamená to, že pokiaľ daný útvar pozorujeme v akomkoľvek meradle, v akomkoľvek rozlíšení, pozorujeme stále opakujúce sa určitý charakteristický tvar,
- má na prvý pohľad veľmi zložitý tvar, ale je generovaný opakovaným použitím jednoduchých pravidiel.

Fraktály sú najzložitejšie geometrické objekty, ktoré súčasná matematika skúma.

Termín fraktál použil poprvé matematik Benoît Mandelbrot v roku 1975. Pochádza z latinského *fractus* – rozbitý. Podobné objekty boli známe v matematike už dlho pred tým (napr. Kochova vločka).