Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

HISTÓRIA ROVNÍC

(Seminárna práca)

Lena Ondrejičková
U2, Mat - Nv

Ružomberok 2008

ÚVOD

Keď sa povie slovo matematika, väčšina ľudí si predstaví rôzne vzorce a rovnice, ktorými možno dospieť k správnemu výsledku. No nie vždy tomu bolo tak. Kedy teda začala potreba poznať rovnice?

V mojej práci chcem poukázať na to, že rovnice, aj keď nie ešte v dnešnej podobe, poznali už v starovekej Mezopotámii. Ďalej chcem opísať vývoj rovníc a ich značení až po súčasnosť. I keď sa nebudem zaoberať všetkými typmi rovníc, chcem opísať aspoň vývoj lineárnych, kvadratických, kubických rovníc a rovníc vyššieho rádu.

Najstaršie náznaky rovníc a neznámej

Najstaršie zmienky o rovniciach pochádzajú ešte z Mezopotámie, krajiny medzi dvomi riekami - Eufratom a Tigrisom. Najmä matematici z oblasti Babylonie riešili ako kvadratické rovnice, tak i sústavy rovníc. Keďže nepoznali algebraické výrazy, príklady zapisovali slovne a väčšinou v nich opisovali konkrétne príklady z bežného života. Ich príklady vyzerali podobne ako tento:

Pr.: *Z 30-tich sarov som zobral 20 silov zrna. Z druhých 30-tich sarov som zobral úrodu 15 silov zrna. Úroda prvého poľa bola o 8,2 väčšia ako úroda druhého. Obsahy oboch polí sú dovedna 30. Aké veľké sú polia?*

Zapísané dnešnou symbolikou matematiky:

$$\frac{20}{30}x - \frac{15}{30}y = 8{,}2$$
$$x + y = 30$$

Sar bola jednotka obsahu a sila jednotka objemu.[1]

Kvadratické rovnice riešili úpravou na úplný štvorec. Namiesto písmen a vzorcov používali akési návody na riešenie rovníc určitého typu. Problémom pre nich mohli byť výsledky, ktoré vyšli záporne alebo ako nula, keďže v tej dobe sa počítalo iba s kladnými číslami. Výsledky zo začiatku iba odhadovali. Používali, aj keď nevedome, určité typy algebraických vzorcov a zákonitostí, ako napr. $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$, $1+2+4+...+2^n = 2^{n+1} - 1$, $1+4+9+...+n^2 = (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n).(1+2+3+...+n)$.[2]

Rovnice sa riešili aj v Grécku. Existoval tu celý rad úloh, v ktorých bolo treba nájsť neznáme číslo. Gréci toto číslo označovali názvom *aritmos*. Znak pre neznámu zaviedol **Diofantos z Alexandrie** (3. stor. n.l.) a označoval ju ς. Podobne zaviedol i znak pre rovnosť a pre odčítanie. Väčšina jeho značiek boli veľké grécke písmená. Svoju prácu uverejnil v diele *Aritmetika*, ktoré pozostáva z 13 kníh. Známe sú aj diofantovské rovnice, ktoré sú tvaru $x^2 + y^2 = c$. Taktiež ukázal, že rovnice tvaru $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$ majú vždy reálne riešenie pre kladné čísla.

Pri riešení rovníc postupovali Gréci zväčša synteticky, čiže používali iba známe veličiny, ktoré boli v zadaní a pomocou nich sa dopracovávali k riešeniu. Neznáme číslo,

---

[1] Porov.: www.gpohkk.edu.sk/htm/komisie/PKmatainf-wwwstr/hist_mat.ppt slide č. 8

[2] Porov.: www.pulib.sk/elpub/FHPV/Strecko1/pdf_doc/6.pdf

keďže ho nepoznali, pri výpočte nepoužívali. Pojem neznámej v inej podobe používali viac v logike a geometrii, tak ako to naznačil **Aristoteles**. Neznáma sa označovala veľkým písmenom a označovala pojem, no nerobili sa s ňou žiadne operácie, takže to bol skôr symbol ako vyjadrenie neznámej.

Istý pokrok, aj keď skôr geometrický, urobil **Euklides**, keď zaviedol úsečku neurčitej dĺžky. Neurčitosť spočívala v tom, že aj keď nakreslil úsečku určitej dĺžky, neuviedol jednotky, takže sa pokladala za neznámu. Ale ani toto nie je ešte vyjadrenie neznámej v striktnom slova zmysle, lebo má pevne danú dĺžku a možno s ňou robiť matematické operácie ako s určitou veličinou.

Myšlienka spojiť Aristotelovu a Euklidovu predstavu o neznámej vznikla u Arabov v 8. storočí. Základom novej algebry bol pojem neznámej označenej písmenom, s ktorou sa dali robiť rovnaké operácie ako so známymi číslami. Ich zmyslom je vyjadriť neznámu veličinu pomocou symbolu a pracovať s ňou ako s celkom určitým číslom. Ďalej s ňou pracujeme rovnocenne ako so známou. Tu začína algebra svoju cestu a z arabského *al gabr* dostáva i svoje pomenovanie.[3]

Počiatok algebry – al-Chwárizmí

Významným arabským matematikom, ktorý sa zaoberal problematikou rovníc, bol **Abú Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí al-Mádžúsí** (780-850), ktorý sa snažil vypracovať všeobecné algoritmické postupy. Skomoleninou jeho mena vznikol názov pre algoritmy. Rozdiel medzi ním a Diofantom bol v tom, že Diofantos riešil príklady pomocou trikov a al-Chwárizmí pracoval s ním vymyslenými postupmi. Napísal knihu *Kniha o sčítaní a odčítaní podľa indického počtu*, ktorá sa zachovala aj v latinčine pod názvom *Algorizmova kniha o praxi aritmetiky*. Opisuje v nej prácu s desiatkovou pozičnou sústavou s nulou, kde sú objasnené aj algoritmy pre aritmetické operácie indického vzoru. Nulu ešte nepovažuje za cifru, ale iba za akúsi značku podobnú desatinnej čiarke; nazýva ju krúžok. Napísal i druhú knihu *Krátka kniha o počte algebry a al-muqábaly*, v ktorej nepoužíva žiadnu symboliku, ale všetko opisuje slovne.

Pre mocniny neznámej má termíny *x - šai (vec), x^2 - mál (majetok), x^3 - káb (kocka), x^4 je málmál, x^5 je kábmál...* Skôr, ako začal riešiť nejakú „rovnicu“, previedol ju na tzv. kanonický tvar, v ktorom vystupovali iba kladné koeficienty a pri najväčšej mocnine bola jednotka. Pritom používal operácie: *al-džabr*, t.j. pričítanie (resp. odčítanie) rovnakého člena k obidvom stranám rovnice, *al-muqábala*, čiže odčítavanie rovnakých mocnín na oboch stranách rovnice a *al-radd*, alebo vydelenie celej rovnice koeficientom pri najväčšej mocnine.[4]

Ako postupoval al-Chawárizmí ukážem na príklade, ktorého zadanie je napísané takto: *„Desať som rozdelil na dve časti, a túto som delil tou a tú touto, súčet toho je dva dihramy a šestina.“* V našej symbolike ide o sústavu: u+v = 10, $\frac{u}{v}+\frac{v}{u}=2\frac{1}{6}$

---

[3] Porov.: Kvasz L.: Matematika a teológia. Prednáška z cyklu „Besedy TF“ In: www.teoforum.sk/clanky/burnout.php

[4] Porov.: www.suma.jcmf.cz/UserFiles/58_14/Kvasz_prednaska.pdf s. 4

Substitúciou $v = x$ a $u = 10 - x$ možno dosadením do druhej rovnice previesť na

$100 + 2x^2 - 20x = 21\ 2/3\ x - 2\ 1/6\ x^2$ *al-džabr*

$100 + 4\ 1/6\ x^2 = 41\ 2/3\ x$ *al-radd*

$24 + x^2 = 10x$

Al-Chwárizmí robí presne tieto kroky, ale v čisto verbálnej podobe:

„ to bude dvadsať jedna vecí a dve tretiny veci bez dvoch majetkov a jednej šestiny, rovné sto a dvom majetkom bez dvadsiatich vecí. Al-džabruj *to, a pridaj dva majetky a jednu šestinu k sto a dvom majetkom bez dvadsiatich vecí, a pridaj tých od sta a dvoch majetkov ubraných dvadsať vecí k dvadsať jednej veci a dvom tretinám veci. Tak si dostal sto a štyri majetky a šestinu majetku rovné štyridsať jednej veci a dvom tretinám veci.* Al-radduj *to ...“*[5]

Názov operácie al-džabr sa onedlho začal používať pre označenie celej náuky o rovniciach – algebry. Toto pomenovanie prevzali Európania v 14. stor. a tiež algebraickým termínom dali latinské názvy ako *res* pre šai (vec), *census* pre mál (majetok) a *cubus* pre káb (kocku).

Rozvoj rovníc v Európe

11. a 12. storočie umožnilo kresťanom spoznávať grécke a arabské rukopisy. Preto 12. stor. sa nazýva aj storočím prekladov. Do latinčiny preložili mnohé významné diela matematikov celého sveta. Keďže prekladatelia väčšinou nevedeli, čo prekladajú, ich preklady boli dosť nepresné. Preto bolo treba neustále preklady vylepšovať a skúmať ďalej.

Jedným z týchto „vylepšovatelov“, čo sa týka algebry, bol aj **Johann Müller Regiomontanus** (1436 – 1476). V jeho listoch z r. 1463 je zapísané jedno z prvých použití algebraickej symboliky v dejinách európskej matematiky. Vyzeralo nasledovne:

250^r ig 25^c —— 2^c et 100 ig 20^r, čo by dnes vyzeralo ako $250x - 25x^2 = 2x^2 + 100 - 20x$.

Neznámu označuje r a c podľa prvého písmena latinského názvu a píše ju ako horný index. Operácie vypisuje slovne a pre znak rovnosti používa dlhú vodorovnú čiaru.

Nicolas Chuquet (1445 - 1500) pre neznámu neudáva žiaden symbol, len ju označuje indexom pri koeficiente, napr. 4x píše ako 4^1, $3x^2$ ako 3^2. Konštantu bez koeficientu označuje indexom 0, takže napr. číslo 5 je 5^0.

Okrem nich tu boli ďalší matematici, ktorí neustále upravovali označenia a symboly v zápise rovníc, ako napr. **Luca Pacioli, Johannes Widmann**, či **Michael Stifel**, ktorý už používal označenia +, -, √ a pri riešení rovníc všetky členy preniesol najskôr na jednu stranu rovnice. Tým pripustil, že koeficienty môžu byť aj záporné a vytvoril tak jeden všeobecný zápis pre rovnice.[6]

Prvým, kto sa pokúšal o *riešenie kubických rovníc* bol **Niccolo Fontana - Tartaglia** (1500 - 1557). Podarilo sa mu nájsť postup, akým možno dospieť k riešeniu týchto typov rovníc. Jeho nápad mu však zobral **Girolamo Cardano** (1501 - 1576), ktorý výsledky Tartagliho práce uverejnil pod svojim menom r. 1545 v diele *Ars Magna sive de Regulis*

[5] www.suma.jcmf.cz s. 5

[6] Porov.: www.suma.jcmf.cz s. 5-8

Algebracis (Veľké umenie čiže o zákonoch algebry). Cardanov vzorec sa zrodil pri riešení rovnice $x^3 + px = q$. Cardanovým prínosom do riešenia tohto problému bolo práve to, že ako prvý dokázal, že každá kubická rovnica tvaru $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ sa dá upraviť na taký tvar, ktorý už neobsahuje kvadratický člen.

Cardano svoje riešenia demonštroval na rovnici $x^3 + 6x = 20$. Použil substitúciu $x = u + v$ za podmienky $u.v = -\frac{6}{3} = -2$. Táto podmienka zaručila, že po dosadení do rovnice $(u + v)^3 + 6(u + v) = 20$ z nej dostal $u^3 + v^3 = 20$ a samozrejme platí aj $u^3 v^3 = -8$.
Z druhého vzťahu dostal $u^3 = -\frac{8}{v^3}$. Dosadením do prvej rovnice platí: $v^6 - 20v^3 - 8 = 0$.

Riešením tejto kvadratickej rovnice prišiel k $v^3 = \frac{20 \pm \sqrt{432}}{2} = 10 \pm 6\sqrt{3}$ a teda $u^3 = 20 - v^3 = 10 \mp 6\sqrt{3}$. Keďže podľa $x = u + v$ sú u a v zameniteľné, stačilo, ak beral do úvahy iba hodnoty $v^3 = 10 + 6\sqrt{3}$ a $u^3 = 10 - 6\sqrt{3}$.

Preto $x = u + v = \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \approx$
$\approx \sqrt{-0,392304} + \sqrt[3]{20,362304} \approx -0,7320502 + 2,7320507 =$
$= 2,0000005 \approx 2$
A skutočne platí, že $x = 2$ je koreňom pôvodnej rovnice $x^3 + 6x = 20$. Táto metóda je ale pomerne ťažkopádna, lebo je veľmi ťažké na základe tých „odmocninových“ výrazov usúdiť, že výsledok je presne 2. V dobe Cardana matematikom robilo dosť problémov vyčísliť neprehľadné iracionálne výrazy. Väčším problémom tejto metódy je, že pomocou nej dostaneme iba jeden koreň, hoci by sme čakali tri. Tie sa dajú vyčísliť iba pomocou komplexných čísel. A Cardano ešte nemohol počítať s komplexnými koreňmi.[7]

Všeobecne sa dá Cardanov vzorec vyjadriť ako $x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Ďalším významným matematikom bol **François Viète** (1540-1603). V knihe *Úvod do analytického myslenia* z roku 1591 podáva súvislý prehľad algebry. Jeho cieľom bolo zjednotiť rôzne postupy používané pri riešení rovníc a podať ich tak, aby im rozumeli všetci. Jeho hlavnou inováciou bolo, že rozlíšil označenie neznámej od parametra. Vytvoril univerzálny jazyk na manipuláciu s výrazmi. Dá sa povedať, že začal novú éru v algebre. Nová symbolika umožňovala vytvoriť *všeobecnú metódu na riešenie všetkých problémov*. Pozostávala z troch krokov:
1. Všetky veličiny úlohy, teda tie, ktoré poznáme aj tie, ktoré nepoznáme treba označiť písmenami, a ich vzťahy treba vyjadriť pomocou rovníc.
2. Overiť správnosť vyjadrenia úlohy pomocou rovníc.
3. Príslušné rovnice vyriešiť a nájsť vyjadrenie neznámej.

[7] math.fce.vutbr.cz/~pribil/workshop_2006/prispevky/Lengyelfalusy.rtf

Overenie správnosti vyjadrenia úlohy spočívalo v kontrole toho, či príslušné rovnice spĺňajú princíp homogenity.
Nedostatkom Viétovho systému bolo najmä v slovnom písaní dimenzií veličín a obchádzaní úloh, ktoré vedú k záporným alebo komplexným riešeniam.[8]
Ďalšou významnou vecou, ktorú Viéte zaviedol, boli tzv. vietove vzťahy. Tieto určujú vzťah medzi koreňmi a koeficientmi rovnice.

Rafael Bombelli zaviedol počítanie s komplexnými číslami. Ako prvý použil iracionálne číslo *i* ako riešenie rovnice $x^2 + 1 = 0$.

Súčasná podoba rovníc

Zásluhu na tom, ako vyzerá zápis rovníc v súčasnosti, má francúzsky matematik **René Descartes** (1594 -1650). Z hľadiska algebry má najväčší význam jeho dielo *Geometria*, v ktorej tvrdí, že problémy, ktoré možno skonštruovať pomocou kružidla a pravítka sú ekvivalentné rovniciam druhého stupňa. Do doby Descartesa bolo násobenie dvoch úsečiek interpretované ako plocha a troch ako objem. Pre súčin štyroch a viac úsečiek interpretácia neexistovala. Descartes vyjadruje súčin úsečiek inak. Úsečky dĺžky *a* a *b* interpretuje znovu ako úsečku dĺžky *ab*. Všetky mocniny úsečky boli tiež úsečkou. Takto odstránil problémy s vyššími mocninami ako je tretia. Od doby Descarta píšeme rovnice v kanonickom tvare: $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$. Takáto formula bola pred Descartom nemysliteľná. Miešať dĺžky, plochy, objemy s veličinami vyššej dimenzie nebolo možné. Až Descartes tým, že všetky členy interpretoval ako úsečky, mohol niečo takéhoto napísať. Pritom treba zdôrazniť, že premenné nepredstavujú čísla ale úsečky, pretože pojem čísla bol v tej dobe príliš obmedzený.
Descartes na rozdiel od Viéta používa na označenie koeficientov písmená zo začiatku abecedy (a, b, c) a na označenie neznámej písmená z konca abecedy (x, y, z), kým Viéte použil na označenie koeficientov spoluhlásky a neznámych samohlásky. Descartesovo označenie sa zachovalo dodnes. Taktiež začal písať mocniny ako horný index. Výnimkou bola iba druhá mocnina, ktorú písal ako *xx*. Od jeho čias sa všetky členy rovnice píšu na ľavú stranu rovnice a na pravú sa píše nula.[9]

Ešte mnoho matematikov sa zaslúžilo o rozvoj rovníc. Napríklad **Joseph-Louis Lagrange** (1736 – 1813) sformuloval interpolačný polynóm, ktorým možno preložiť ľubovoľný počet bodov a získame funkciu, ako aj diferenciálne rovnice. **Niels Henrik Abel** (1802 – 1829) dokázal, že neexistuje všeobecný vzorec na hľadanie koreňov rovníc vyššieho stupňa ako štyri. **Evariste Galois** (1811 – 1833) v noci pred súbojom, v ktorom zomrel, napísal výsledky svojej práce, t.j. návod na určenie toho, či pre danú rovnicu existuje vzorec na výpočet koreňov. Tieto však boli pochopené až 13 rokov po jeho smrti.

[8] Porov.: www.suma.jcmf.cz s. 11
[9] Porov.: www.suma.jcmf.cz s. 12

Záver

O rovniciach a ich vývoji a rozvoji na súčasný tvar by sa dalo ešte veľa písať. Napríklad o vzniku goniometrických, logaritmických či diferenciálnych rovníc..., o ktorých sa príliš nezmieňujem. No i na týchto pár stranách je možné vidieť, že rovnice, kým sa dostali do súčasnej podoby, museli prejsť mnohými zmenami v chápaní a v označovaní, kým sa našiel vhodný systém, ktorý by bol pochopiteľný pre všetkých.

Literatúra:

1. www.suma.jcmf.cz/UserFiles/58_14/Kvasz_prednaska.pdf
2. www.gpohkk.edu.sk/htm/komisie/PKmatainf-wwwstr/hist_mat.ppt
3. math.fce.vutbr.cz/~pribyl/workshop_2006/prispevky/Lengyelfalusy.rtf
4. www.pulib.sk/elpub/FHPV/Strecko1/pdf_doc/6.pdf
5. Prednáška Ladislava Kvasza: Matematika a teológia. Z cyklu „Besedy TF“ z 13.3.2007 uverejnená na www.teoforum.sk/clanky/burnout.php