KATOLÍCKA UNIVERZITA, RUŽOMBEROK

Pedagogická fakulta

Friedrich Ludwig Gottlob Frege

Katarína Očovská
odbor: Matematika - Informatika
1. roč. Mgr. 2008/2009

Friedrich Ludwig Gottlob Frege

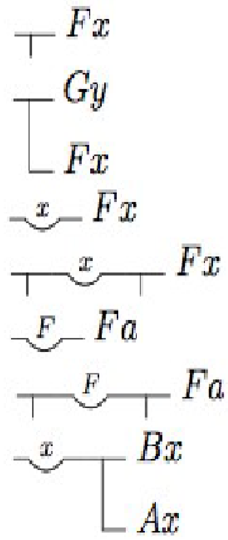
(* 8. 11. 1848 Wismar, † 26. 7. 1925 Bad Klein)

Nemecký matematik, logik a filozof Gottlob Frege študoval v Jene a Gotittingene. Celý čas pôsobil v Jene, kde v roku 1873 obhájil matematickú dizertáciu a získal titul doktora filozofie a v roku 1897 titul mimoriadneho profesora na matematickom ústave univerzity. Významné vedecké uznanie počas svojho života nedosiahol, jeho priekupnícku prácu ocenil až B. Russell.

Jedným z jeho základných diel je Pojmové písmo (1879). Týmto dielom začal novú epochu histórie logiky, ktorá nahradila doteraz používanú Termovú logiku, ktorá prežila prakticky v nezmenenej podobe od Aristotela. Dielo však nebolo pochopené a viacerí významný logici tohto obdobia toto dielo neušetrili silnej kritike. Jedným z dôvodov tohto odmietnutia bolo nepochopenie Fregeho notácie, ktorá bola, už z moderného pohľadu, zložitá a zápis sa realizoval vo forme špecificky geometricky pospájaných objektov, čím ho nebolo možné písať do riadku, tak ako to robíme dnes. Myšlienky, ktoré priniesol v tomto diele boli na svoju dobu prevratné. Zaviedol názov kvantifikátory (pre slová všetci, každý, niektorý, existuje aspoň jeden). Rozlišoval medzi zmyslom a referenciou. Taktiež striktne oddeľoval objekty a pojmy – koncepty (objekty od funkcií a predikátov).

Príklad Fregeho notácie: (používal logiku druhého rádu, teda aj funkcie mohli byť objektom kvantifikácie)

	Moderná notácia	Fregeho notácia
Nie je to prípad kedy platí Fx	$\neg Fx$	
Ak Fx tak Gy	$Fx \rightarrow Gy$	
Pre každé x platí Fx	$\forall x Fx$	
Pre niektoré x platí Fx	$\neg\forall x \neg Fx$, t.j., $\exists x Fx$	
Každé F je také, že Fa	$\forall F\, Fa$	
Niektoré F je také, že Fa	$\neg\forall F \neg Fa$, t.j., $\exists F\, Fa$	
Pre každé x platí ak Ax tak Bx	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$	



Gottlob Frege je tiež označovaný za jedného z hlavných predstaviteľov tzv. logicizmu, smeru v logike ktorý tvrdil, že aritmetika (teda celá matematika) je redukovateľná do logiky a snažil sa takúto redukciu vytvoriť. Vo svojom ďalšom diele Základné pravidlá aritmetiky (1893) formalizoval pojem "dôkaz" v podobe, aký je aj v súčasnosti akceptovaný a zaviedol špecifický systém axióm, ktorým chcel túto redukciu opísať. Bohužiaľ jedna z jeho axióm (základné axióma V), ktorá bola pridaná, aby mohol z logiky odvodiť podstatnú časť matematiky, spôsobila nekonzistentnosť.

Axióma V

Pred zavedením samotnej axiómy je potrebné uviesť špecifickú symboliku, ktorú Frege používal. Zadefinoval si špeciálny symbol $\dot{\epsilon}f(\epsilon)$ resp. $\dot{\alpha}g(\alpha)$ na vyjadrenie oboru hodnôt funkcie f resp. g (teda pojmu f resp. g). Tento objekt sa označuje ako extanzia pojmu f (rozsah pojmu f). Extanziu ako objekt Frege striktne oddeľoval od pojmov f a g.

Napr. $\dot{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon)$ označuje obor hodnôt $x^2 - x$ resp. $\dot{\alpha}(\alpha \cdot (\alpha - 1))$ označuje obor hodnôt funkcie x . (x - 1).
Podľa Fregeho potom

$$\forall x[x^2 - x \;=\; x \cdot (x-1)]$$

má tú istú pravdivostnú hodnotu ako

$$\dot{\epsilon}(\epsilon^2 - \epsilon) \;=\; \dot{\alpha}(\alpha \cdot (\alpha - 1)).$$

Táto ekvivalencia je princípom *axiómy V*.

$$\dot{\epsilon}f(\epsilon) = \dot{\alpha}g(\alpha) \equiv \forall x[f(x) = g(x)]$$

Princíp tejto axiómy je zrejmý, obory hodnôt dvoch funkcií (pojmov) sú zhodné, ak tieto funkcie zobrazujú tie isté objekty na rovnaké hodnoty. Keďže, ale Fregeho systém ide za hranice prvorádovej logiky táto axióma je zdrojom nekonzistentnosti.
Bolo veľa pokusov ako opraviť Fregeho systém. Klasický prístup bol obmedziť axiómu, ktorá nekonzistenciu vyvolala, prípadne zmeniť chápanie princípu konceptov. Boolos prišiel s nápadom ako upraviť chybnú axiómu bez toho aby sme opustili druhorádovú logiku a jej chápanie princípu konceptov. Na druhej strane bolo veľa nápadov ako zmeniť princíp konceptov, niektoré navrhovali dokonca úplne upustiť od druhorádovej logiky a aj od princípu konceptov. Napriek problémom s nekonzistentnou axiómou, Frege urobil chvályhodný kus práce.

Ďalší vzťah ktorý Frege zaviedol bola *Ekvinumerozita (Equinumerosity)*, pod ktorým chápal reláciu v ktorej sú dve množiny, ak majú rovnaký počet prvkov. Trocha formálnejšie povedané:

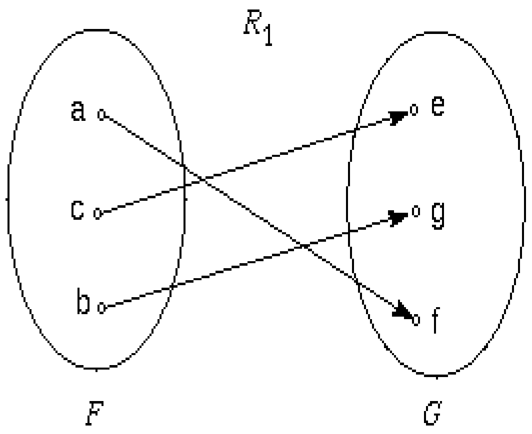
F a *G* sú ekvinumerické (prvky *F* a *G* sú jeden-ku-jednému korešpondujúce) iba ak existuje relácia *R*, taká že

1. každý objekt spadajúci pod *F* má pomocou *R* priradený unikátny prvok z *G*

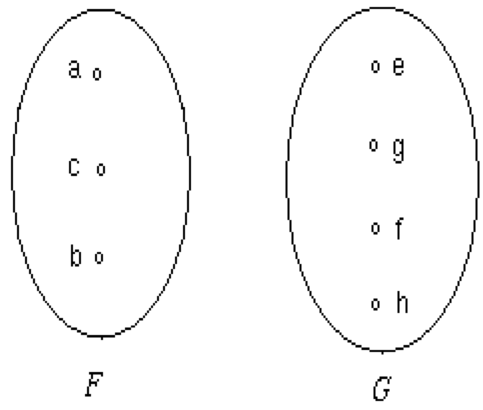
2. každý objekt spadajúci pod *G* je taký, že existuje jediný prvok z *F*, ktorý ho má pomocou *R* priradený.

Ukážem použitie definície na príkladoch. V prvom príklade (obrázok 1) sme našli reláciu (R_1 = [λxy (x=a & y=f) v (x=b & y=g) v (x=c & y=e)]), teda koncepty F a G sú ekvinumerické. V druhom príklade (obrázok 2) neexistuje relácia, ktorá by spĺňala podmienky z definície. Je zrejmé, že koncepty F a G sú ekvinumerické, vždy vtedy, keď počet objektov, ktoré do každého z nich spadajú, je rovnaký.

Obrázok 1



Obrázok 2



Niektoré vlastnosti ekvinumerozity

(1) ak sú dva koncepty materiálne ekvivalentné (identické), sú aj ekvinumerické

(2) ekvinumerozita je reflexívna

(3) ekvinumerozita je symetrická

(4) ekvinumerozita je tranzitívna

Do tejto práce som vybrala len pár vecí, ktoré Gottlob Frege vymyslel a pomenoval za svojho života. Uznáva sa mu, že prispel od krízy matematiky k novej logike. Ukázal jasný rozdiel medzi premennými a logickými konštantami, formulami a pravidlami odvodzovania. Zaviedol názov kvantifikátory (pre slová všetci, každý, niektorý, existuje aspoň jeden). Zdôraznil, že musíme rozlišovať medzi vlastnosťami vecí a vlastnosťami pojmov s tým, aby sa zaraďovali na rozličné stupne. Rozlíšením funkcie a jej priebehu spresnil chápanie pojmu funkcia. Vytvoril aj prvý axiomatický systém klasickej logiky. Vybudoval výrokový kalkul ako formalizovanú deduktívnu teóriu. Svojimi úvahami o zmysle a význame sa zaslúžil o neskorší rozvoj logickej sémantiky. Aj keď množstvo matematikov bolo proti prácam Fregeho a neuznávalo ho, jedno mu treba uznať, pripravil základy modernej teórie abstrakcie a ovplyvnil rozvoj analytickej filozofie. Taktiež získal aj spriaznených nasledovateľov (Russell, Wittgenstein) a Alfred Tarski (1902 –1983), uznávaný svetoznámy logik, o ňom povedal: „Nemecký logik G. Frege je bezpochyby najväčší logik 19. storočia.“

Literatúra:

1) http://www.sfu.ca/~jstacho/old/dej_logiky/esej.pdf

2) http://www.equark.sk/index.php?cl=scientist&iid=59

3)http://209.85.129.132/search?q=cache:hRLmSKviwKsJ:delo.dcs.fmph.uniba.sk/~fendek/frege.doc+frege&cd=5&hl=sk&ct=clnk&gl=sk&lr=lang_sk

4) http://www.ff.unipo.sk/kfil/data/down/and_II.pdf