KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU

Pedagogická fakulta

TEÓRIA HIER

(Seminárna práca z Histórie matematiky)

Antónia Mičúchová

Bio-Mat

4.roč

2006-2007

TEÓRIA HIER

Teória hier je odvetvím aplikovanej matematiky. Používa modely na skúmanie interakcií s formalizovanou štruktúrou pohnútok („hier“). Teória hier skúma predpokladané a skutočné správanie sa jednotlivcov v hrách, rovnako ako aj optimálne stratégie. Zdanlivo odlišné typy interakcií sa môžu prejavovať podobnými štruktúrami pohnútok, takže všetky môžu byť reprezentované ako príklady jednej konkrétnej hry.

Kameň – papier – nožnice

Túto hru pozná asi každý, ale pre istotu uvediem jej pravidlá. Hráč ukáže buď zatvorenú dlaň **(čo vyjadruje kameň),** alebo zdvihne tri prsty **(nožnice)** alebo zdvihne všetkých päť prstov **(papier).** To isté robí súčasne s ním jeho protihráč. Kameň vyhrá nad nožnicami (otupí ich), nožnice nad papierom (rozstrihajú ho) a papier nad kameňom (zabalí ho). Obidvaja hráči tak majú možnosť voľby medzi **troma stratégiami (kameň, papier, nožnice).** Ak sa hráč A rozhodne pre kameň a hráč B pre nožnice, víťazom je hráč A a **cena jeho výhry je 1**, ak prehrá (ukáže kameň a súper papier), **cena jeho výhry je -1** a ak obidvaja hráči zvolia tú istú stratégiu, tak **cena ich výhry je 0** (nikto nezíska ani neprehrá). Matica hry potom je

		hráč B		
		kameň	nožnice	papier
	kameň	0	1	-1
hráč A	nožnice	-1	0	1
	papier	1	-1	0

Po výpočte dostaneme optimálnu stratégiu $u = v = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, čo asi každý vedel alebo tušil.

PÔVOD A VYUŽITIE TEÓRIE HIER

John von Neumann a Oskar Morgenstern ako prví formalizovali túto tému v roku 1944 v ich knihe *Teória hier a ekonomické správanie (Theory of Games and Economic Behavior)*. Dôležité aplikácie teórie hier nájdeme v oblastiach ako operačná analýza, ekonómia, medzinárodné vzťahy, evolučná biológia, vojenská stratégia, kolektívne správanie, politológia a psychológia. Je úzko spätá s ekonómiou v tom zmysle, že sa snaží nájsť racionálne stratégie v situáciách, kde výsledok nezávisí len od našej stratégie a „podmienok na trhu“, ale aj od stratégií zvolených ostatnými hráčmi. Ciele jednotlivých hráčov môžu byť rozdielne, ale môžu sa aj prekrývať. Aplikácie vo vojenskej stratégii do istej miery prispeli k rozvoju teórie hier v jej začiatkoch.

Teória hier hrá čoraz dôležitejšiu úlohu v logike a v informatike. Niekoľko logických teórií má základ v sémantike hier. Informatici používajú hry na modelovanie interaktívnych výpočtov. Výpočtová logika sa snaží vyvinúť komplexnú formálnu teóriu (logiku) interaktívnych výpočtových úloh a zdrojov tak, že tieto entity formalizuje ako hry medzi výpočtovým agentom (činiteľom) a jeho okolím.

Analýza teórie hier sa môže vzťahovať na jednoduché zábavné hry alebo na závažnejšie aspekty života a spoločnosti. Väzňova dilema, ktorú spopularizoval matematik Albert W. Tucker, poskytuje príklad použitia teórie hier v bežnom živote – má mnoho implikácií pre charakter ľudskej kooperácie.

Biológovia používajú teóriu hier na pochopenie a predpovedanie určitých výsledkov evolúcie. Príkladom je koncept evolučne stabilnej stratégie, ktorý uviedli John Maynard Smith a George R. Price v roku 1973 v časopise Nature. Patrí tu tiež evolučná teória hier a behaviorálna ekológia.

Analytici hier bežne používajú v spojení s teóriou hier aj ostatné odvetvia matematiky, predovšetkým pravdepodobnosť, štatistiku a lineárne programovanie.

TYPY HIER

Hra je dobre definovaný matematický objekt. Pozostáva z množiny hráčov, zo stratégií dostupných daným hráčom a ku každej kombinácii stratégií sú určené výplaty hráčov. Teória hier rozdeľuje hry do mnohých kategórií podľa toho, aké konkrétne metódy sa používajú na ich riešenie a ako v tej-ktorej kategórii definujeme „riešenie“. Medzi základné typy hier patria:

Hry s nulovým súčtom a hry s nenulovým súčtom

V **hrách s nulovým súčtom** je celkový úžitok pre všetkých zúčastnených hráčov a pre každú kombináciu stratégií rovný nule. Inak povedané, víťazný hráč získava na úkor ostatných. Príkladom pre hru s nulovým súčtom je napríklad go, šach alebo poker. V týchto hrách víťaz získa práve toľko, koľko jeho protihráči prehrajú. V realite sa väčšinou stretávame s **hrami s nenulovým súčtom** (v podnikaní alebo v politike, ale príkladom je aj známa väzňova dilema), pretože niektoré výsledky prinášajú celkový čistý úžitok väčší alebo menší než nula. Inak povedané, zisk jedného hráča nemusí pre iného hráča nutne znamenať stratu. Napríklad obchodný kontrakt za bežných okolností predpokladá kladný celkový výsledok, lebo každá zo zúčastnených strán je na tom v konečnom dôsledku lepšie, než v situácii, keď by sa kontraktu nezúčastnila. Vo všeobecnosti je jednoduchšie analyzovať hry s nulovým súčtom. Napokon každú hru možno pretransformovať na hru s nulovým súčtom jednoducho tak, že pridáme dodatočného fiktívneho hráča a prostredníctvom jeho strát budeme kompenzovať výhry reálnych hráčov. Vhodným spôsobom zobrazenia výsledkov hry je matica výnosov.

Kooperatívne hry

Kooperatívna hra je založená na existencii vymáhateľnej dohody medzi hráčmi. V priebehu hry koná hráč s ohľadom na to, aká je jeho dohoda s ostatnými hráčmi. Hráči teda navzájom spolupracujú. Teória kooperatívnych hier vysvetľuje fungovanie hodnoverných dohôd. Hodnovernosť dohody je úzko spätá so stabilitou.

Axiomatické vyjednávanie

Dvaja hráči môžu vyjednávať o veľkosti svojich podielov v rámci kontraktu. Teória axiomatického vyjednávania umožňuje určiť, aký veľký podiel je pre hráčov primeraný. Napríklad Nashovo riešenie vyjednávania vyžaduje, aby bol podiel dostatočne veľký a účinný. *Podrobné objasnenie problematiky poskytujú špecializované učebnice.*

Môže sa však stať, že niekoho nezaujíma „primerané“ riešenie a vyžaduje viac. Čo na to hovorí Nashov koncept riešenia vyjednávania? V skutočnosti jestvuje nekooperatívna hra striedavých ponúk (vyvinul ju Rubinstein), ktorá potvrdzuje Nashovo riešenie vyjednávania ako jedinečný bod Nashovej rovnováhy.

Charakteristické funkčné hry

Namiesto dvoch hráčov môžu spolupracovať viacerí hráči tak, aby dosiahli lepší výsledok. Nie je jasné, aký veľký podiel z celkového výsledku pripadne na každého hráča. Jadro poskytuje primeraný súbor možných podielov. Kombinácia podielov je v jadre, ak neexistuje subkoalícia, ktorej členovia by mohli získať väčší celkový výnos než je podiel na koalícii. Ak podiel neleží v jadre, niektorí členovia môžu byť sklamaní a začnú uvažovať o opustení celej skupiny a vytvorení menšej skupinky (subkoalície) s niektorými inými nespokojnými hráčmi.

Hry s úplnými informáciami

V **hrách s úplnými informáciami** má každý hráč k dispozícii rovnaké informácie týkajúce sa hry ako všetci ostatní. Príkladom hry s úplnými informáciami je šach. Naopak, hrou s neúplnými informáciami je napríklad poker alebo väzňova dilema. Hry s úplnými informáciam sa v bežnom živote vyskytujú iba zriedka. V teórii sa tieto hry používajú pre zjednodušenie - ako aproximácia skutočných, v realite prebiehajúcich hier.

KONFLIKTNÁ A NEKONFLIKTNÁ SITUÁCIA

Teória hier sa zaoberá aj riešením konfliktných a nekonfliktných situácií.

Nekonfliktná situácia je taká rozhodovacia situácia, ktorej sa zúčastňuje len jeden účastník. Aby sa mohol rozhodnúť musí poznať množinu všetkých svojich možných rozhodnutí a vedieť oceniť všetky svoje rozhodnutia.

Konfliktná situácia (konflikt) je taká rozhodovacia situácia, ktorá vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

- ☑ Počet účastníkov konfliktu je konečný.
- ☑ Každý účastník konfliktu pozná množinu všetkých svojich rozhodnutí(stratégií) a množiny rozhodnutí svojich súperov.

- ☑ Každý účastník konfliktu vie oceniť svoje rozhodnutie vzhľadom na rozhodnutie svojich súperov.

Na základe istých kritérií si účastníci konfliktnej situácie vyberú jednu svoju stratégiu. Konflikt sa rieši z hľadiska 1. účastníka. Budeme predpokladať, že aspoň jeden účastník je *inteligentný* t.j. rozhoduje sa tak, aby boli jeho rozhodnutia čo najvýhodnejšie. *Neinteligentných* účastníkov charakterizuje náhodný mechanizmus rozhodovania (príroda). Ak poznáme mechanizmus správania neinteligentného účastníka hovoríme o *rozhodovaní pri riziku*, v opačnom prípade o *rozhodovaní pri neurčitosti*. Účastník konfliktu, ktorý sa s pravdepodobnosťou p chová ako inteligentný a s pravdepodobnosťou 1 _ p ako neinteligentný sa nazýva *p - inteligentný*.
Rozoznávame nasledujúce druhy konfliktných situácií:

1. *Antagonistický konflikt*. Ak sa konfliktu zúčastňujú 2 inteligentní účastníci a volia svoje stratégie tak, aby si zabezpečili maximálne výhry, pričom výhra jedného účastníka ide na úkor druhého účastníka (spoločenské hry, vojenský konflikt).
2. *Neantagonistický konflikt*. Konfliktu sa zúčastňujú najmenej 2 účastníci. Aj tu inteligentní účastníci maximalizujú svoje výhry. Výhra jedného ide na úkor ostatných. Ak naviac účastníci môžu uzatvárať záväzné dohody o svojich rozhodnutiach hovoríme o *kooperatívnej teórii*. Ak dochádza aj k prerozdeľovaniu výhier účastníkov hovoríme o *kooperatıívnej teórii s prenosnou výhrou*. Ak však výhry nie je možné znovu prerozdeliť hovoríme o *kooperatívnej teórii s neprenosnou výhrou*.

V prípadoch, keď účastníci konfliktu majú možnosť viackrát za sebou rozhodovať hovoríme, že majú viac *ťahov* (šach, dáma, piškôrky). Podľa počtu účastníkov delíme konfliktné situácie na konflikty s dvoma účastníkmi a viacerými účastníkmi.

FORMY HIER

Poznáme tieto formy hier:

- ☑ **<u>Strategická forma hry</u>** (resp. hra v normálnom tvare) **– *G(N,S,u)***

N – množina hráčov N = { 1, ... , n }
S – množina strategických profilov hry
S = S1xS2x ... xSn-1xSn
S-i = S1xS2x ... xSi-1xSi+1x ... xSn
Si - množina strategií i-teho hráča
s ∈ S
s = (s1,s2, ... ,sn)
s-i = (s1,s2, ... ,si-1,si+1, ... ,sn)
s = (si, s-i)
si - statégia i-teho hráča
u – výplatná funkcia u: S→R
u(s) = (u1(s),u2(s), ... ,un(s))

ui(s) - výplata i-teho hráča pri použití strategického profilu s
(ui(s) sa často zapisuje ako matica výplat)

I.Nashove ekvilibrium strategickej formy hry *G(N,S,u)* je taký strategický profil s*, že

platí $u(s^*) = u(s^*_i, s^*_{-i}) \geq u(s_i, s^*_{-i})$ pre všetky $i \in N$ a všetky $s_i \in S_i$.
Koncept vzájomne najlepších reakcií vzhľadom na stratégie protihráčov. Každý hráč si vyberie najlepšiu svoju stratégiu.
Množinu Nashových ekvilibrií hry G označujeme **NE**.

Príklad
Pod jedným stromom v oáze sedia dve opice, malá a veľká. Sú hladné a na strome rastie jediné zázračné jablko, obsahujúce 10 MJ. Ak vylezie na strom veľká opica spáli 2 MJ a strasie jablko. Malá ho začne hneď jesť. Malá opica pri výstupe na strom nespáli nič. Ak začne jesť jablko malá opica, tak odje 4 MJ. Ak začne jesť veľká, tak malej nechá len zbytky, hodné 1 MJ. Ak sa obidve dostanú k jablku naraz, tak malej sa ujdú 3 MJ.
i) Napíšte strategickú formu tejto hry.
ii) Nájdite Nashove ekvillibria.
Riešenie
i) *Máme 2 opice, čiže* ***N={1,2}****. Každá opica má na výber ísť hore (H) alebo ostať dole (D), čo sú vlastne jej akcie (v tomto prípade aj stratégie). Teda* ***A1= A2 = {H,D}****.*
Funkciu výplat zapíšeme v tvare bimatice

MO

VO		H	D
	H	5,3	4,4
	D	9,1	0,0

ii) *Nashove ekvilibriá hľadáme tak, že v riadkoch hľadáme maximum z výplat MO a v stĺpcoch maximum z výplat VO. Vlastne hľadáme stratégiu, ktorá nás privedie k najlepšej výplate pre jedného hrača pri tej istej stratégií druhého hráča. (Ak je to hra s troma hráčmi, tak pre tretieho hľadáme maximum v rovnakých bunkách tabuliek, teda maticiach výplat) Bunka tabuľky, ktorá obsahuje obe maximá je Nashove ekvilibrium.* ***NE = { (H,D), (D,H) }***

MO

VO		H	D
	H	5,3	**4,4**
	D	**9,1**	0,0

II.Dominantné a dominované stratégie

Stratégia s_i' je **ostro dominovaná** stratégií s_i'' hráča i ak platí
$u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i'', s_{-i})$ pre všetky $s_{-i} \in S_{-i}$

Stratégia si‘ je ostro dominovaná stratégií si‘‘ hráča i ak platí, že pre ktorékoľvek stratégie ostatných hráčov dá si‘ nižšiu výplatu ako si‘‘ pre hráča i.

Stratégia si‘ je **slabo dominovaná** stratégií si‘‘ ak platí
ui(si‘,s-i) ≤ ui(si‘‘,s-i) pre všetky s-i∈S-i pokiaľ ui(si‘,s-i) < ui(si‘‘,s-i) pre niektoré s-i∈S-i.

Stratégia si‘ je **ostro dominantná** ak platí
ui(si‘,s-i) > ui(si,s-i) pre všetky s-i∈S-i a všetky si∈Si-{si‘}
Ostro dominantná stratégia ostro dominuje všetkym stratégiam hráčov.

Stratégia si‘ je **slabo dominantná** ak platí
ui(si‘,s-i) ≥ ui(si,s-i) pre všetky s-i∈S-i a všetky si∈Si-{si‘}

III.Iterovaná eliminácia dominovaných stratégií

Ekvilibrium iterovanej eliminácie ostro *(resp.* ***slabo*** *)* **dominovaných stratégií** získame postupnou elimináciou ostro (slabo) dominovaných stratégií, až kým nám neostane po jednej stratégii pre každého hráča, ktoré tvoria toto ekvilibrium. Pričom pod postupnou elimináciou rozumieme, že ďalšiu dominovanú stratégiu hľadáme v matici výplat už bez predtým nájdených dominovaných stratégií.
Hra je riešiteľná dominanciou ak existuje ekvilibrium iterovanej eliminácie ostro dominovaných stratégií.

IV. Kombinované stratégie

Kombinovaná stratégia je rozdelenie pravdepodobnosti nad množinou čistých stratégií.
Si - množina čistých strategií i-teho hráča, jej veľkosť |Si| = m
Kompletne kombinovaná stratégia obsahuje všetky čisté stratégie hráča.
∑i množina všetkých kombinovaných stratégií.

$$\sum_i = \{\sum_{j=1}^{m} \beta(s_j)s_j \mid \text{všetky } \beta(s_j) \geq 0,\ s_j \in S_i, \sum_{j=1}^{m} \beta(s_j) = 1\},\ \sigma_i \in \sum_i$$

☑ **<u>Rozvinutá forma hry</u>** popisuje rozhodovaciu situáciu vo forme grafu. Rozhodovanie hráčov prebieha postupne v jednotlivých rozhodovacích bodoch vo forme akcií. Až keď hra skončí, môžeme povdať, že hráč použil stratégiu, ktorá je zložená z postupností použitých akcií. Používa sa na zápis a riešenie dynamickej hry. Graf takejto hry sa nazýva strom hry.

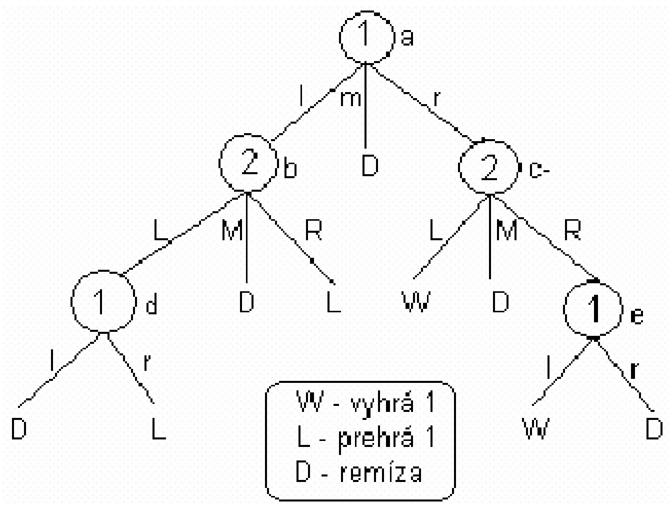
I. Strom hry je graf, ktorý musí mať jediný začiatok, neobsahovať cykly a každému uzlu musí priamo predchádzať len jeden uzol. Pozostáva z vetiev a uzlov. O každom uzle musí byť známe, ktorému hráčovi a do ktorej informačnej množiny patrí. Uzly rozdelujeme na rozhodovacie, koncové, predchodcov, nasledovníkov a jeden začiatočný. Každý **rozhodovací uzol** predstavuje rozhodovacií bod jedneho z hráčov. Každý **koncový uzol**

obsahuje výplaty hráčov. **Predchodca uzla X** je uzol, ktorý dosiahneme v strome pred tým ako dosiahneme X. **Nasledovník uzla Y** je uzol, ktorý môžme dosiahnúť po tom ako sme dosiahli Y. Každá **vetva** predstavuje jednu akciu z hráčovej množiny akcií v danom uzle. **Cestou z uzla S do C** označujeme postupnosť uzlov a vetiev od S do C. Teda kto bol na rade a ako sa rozhodol. Pod pojmom „cesta“ sa myslí cesta od začiatočného uzla po koncový.

Informačná množina je množina uzlov v strome, tieto uzly musia patriť len jednému hráčovi a množina akcií v daných uzloch musí byť rovnaká. Ak za jedným uzlom nasleduje druhý tak tieto uzly nemôžu patriť do rovnakej informačnej množiny. Ak obsahuje viac uzlov, hráč vie, že sa v nej nachádza, no nevie v ktorom uzle.

Hra má **dokonalú infomáciu**, ak každá informačná množina obsahuje jediný uzol, ináč má nedokonalú informáciu. Pri takejto hre každý hráč vie, v ktorom uzle sa na strome nachádza, keď je na ťahu.

Príklad
Máte hru v rozvinutej forme, reprezentovanú nasledovným stromom hry:



i) Koľko informačných množín majú hráči? Koľko akcií a uzlov obsahujú?
ii) Koľko čistých stratégií majú hráči?
iii) Je to hra s dokonalou informáciou?

Riešenie
i) Hráč 1 má **3 informačné množiny**, obsahujúce po jednom uzle. Informačná množina s uzlom a obsahuje 3 akcie, zvyšné obsahujú po 2 akcie každá. Hráč 2 má **2 informačné množiny**, obsahujúce po 1 uzle a 3 akciách.

ii) Hráč 1 má 3x2x2 = **12 čistých stratégií** a Hráč 2 má 3x3 = **9 čistých stratégií**.

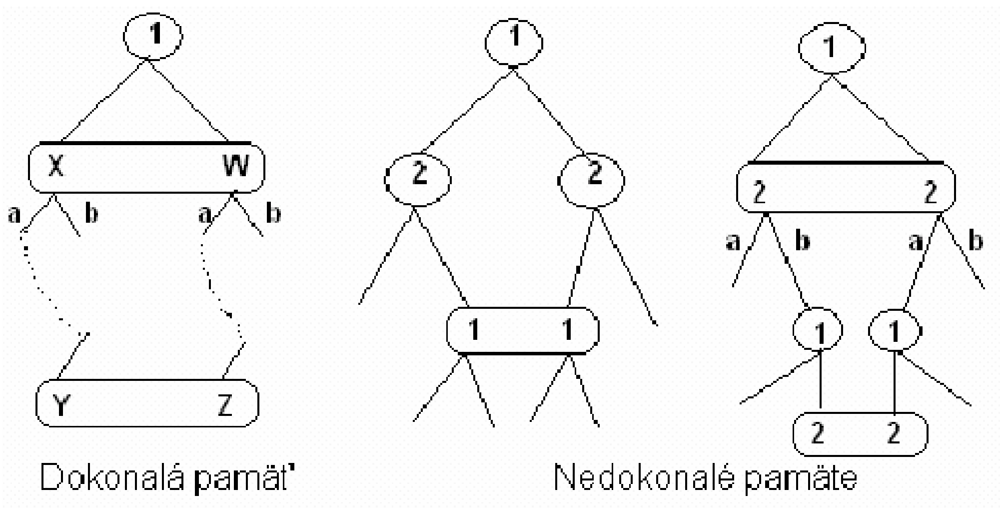
iii) Táto hra je **hra s dokonalou informáciou**, lebo každá informačná množina obsahuje 1 uzol.

II. Kombinovaná a pochodová stratégia

1. Kombinovaná stratégia (mixed strategy) - vopred (ex-ante) sa priradí pravdepodobnosť použitia čistým stratégiám
1/2AC+1/2BC

2. Pochodová stratégia (behaviour strategy) - „za pochodu“ (ad hoc) sa priradí pravdepodobnosť použitia akciám v jednotlivých uzloch
1/2A+1/2B, 1/3C+2/3D

Hra v rozvinutej forme má **dokonalú pamäť** ak platí: ak je uzol jeY nasledovník uzla X, typu Y = (X,a,a1,...,ak) a uzol Z, ktorý je v rovnakej informačnej množine ako Y, tak Z je nasledovníkom uzla W, typu Z= (W,a,á1,...,án), tak W je v rovnakej informačnej množine ako X.



V hrách s dokonalou pamäťou má každá kombinovaná stratégia svoju zodpovedajúcu pochodovú stratégiu a naopak. (zodpovedajúca = priradí rovnakú
pravdepodobnosť koncovým uzlom)

Zoznam bibliografických odkazov:

http://sk.wikipedia.org/wiki/Te%C3%B3ria_hier

LIT: Štefan Pleško, Teória hier, 2000-2004

LIT: Vladimír Pravňan, Diplomová práca: Zbierka úloh z teórie hier, Bratislava, 2003