KATOLÍCKA UNIVERZITA V RUŽOMBERKU

Pedagogická fakulta

Riemannova geometria

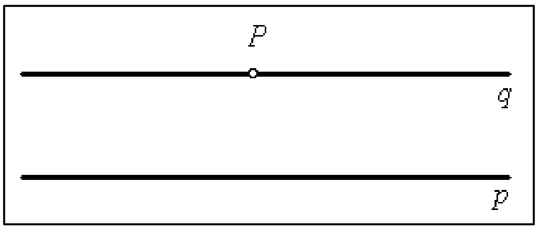
História matematiky

Študent: Ján Lizoň
Ročník: 1.Mgr
Šk. rok: 2008/2009
Kombinácia: Ma-Fy

Riemannova geometria

Georg Friedrich Bernhard Riemann sa narodil 17.9.1826 v Brezelenz. Tento vinikajúci matematik nemal už od mladosti ľahký život. Zomreli mu rodičia a súrodenci na tuberkulózu. Aj napriek týmto okolnostiam bol schopný vytvoriť novú, revolučnú časť matematiky (geometrie), ktorá ovplyvnila nielen fyzikálny svet ale celkové nazeranie na vesmír.

Piaty postulát Euklidovskej geometrie bol už od jeho vzniku objektom diskusií. Už Riemannov výborný profesor Karl Gauss prišiel na nový druh geometrie. Toto bolo preňho také nezvyčajné, že sa bál s tým vystúpiť na verejnosť. Po takmer dvadsiatich piatich rokoch prišiel na myšlienku neeuklidovskej geometrie Nikola Lobačevskij a s ním nezávisle János Bolyai. Podstatou ich geometrie bola myšlienka, ktorú neskôr zmenili na axiómu, že existujú najmenej dve priamky *p ,p´*, ktoré prechádzajú tým istým bodom P, naležiacim na priamke q, a ktoré sú s priamku q rovnobežné. Pre porovnanie v euklidovskej geometrii existovala jediná taká priamka(Obr.1). Toto spôsobilo veľký rozruch a Lobačevskij ostal nepochopený a matematická obec ho označila za blázna. Ale aj napriek všetkým zmenám sa Lobačevského geometria od Euklidovskej líšila len poslednom piatom postuláte. Lobačevského geometria nám ukázala, že priamka nemusí byť stála „rovná“ ale jej tvary môžu byť prekvapivo rozličné. Tento poznatok podporil myšlienky Riemanna. On porušil ešte jednu predstavu o priamke, ktorú nevyvrátilo ani štúdium Lobačovského geometrie, a to, že priamka nemusí byť nekonečná. Jednoducho povedané Riemann považoval priamku za konečnú krivku. Na základe toho vytvoril geometriu, v ktorej sa piata axióma zmenila. Riemannova axióma:

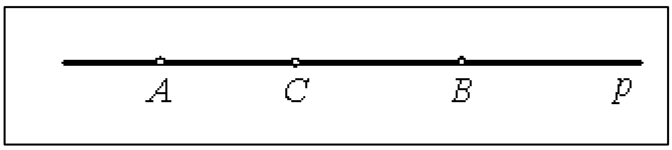


Obr.1 Rovnobežky v Euklidovskej geometrii

Ľubovoľným bodom A(A neleží na p) neprechádza ani jedna priamka, ktorá by nepretínala danú priamku p a pritom ležala v rovine určenej priamkou p a bodom A.

Riemannova axióma hovorí o tom, že dve priamky jednej roviny sa vždy pretnú, neexistujú rovnobežky. Táto axióma je ale v rozpore s klasickou Euklidovskou geometriou.

Pojem nekonečnej priamky je spojený s pojmom usporiadania bodov na nej (Obr.2). Môžeme vyhlásiť, že bod C leží medzi bodmi A a B. Máme tu ale priamku nekonečne dlhú. V Riemannovej geometrii pracujeme s priamkami konečnými a uzavretými. Je asi zrejmé, že bude treba urobiť menšie zmeny v axiómach usporiadania bodov. Usporiadanie bodov na našej priamke musí byť podobné usporiadaniu bodov na uzavretej krivke podobnej kružnici (Obr. 3). Ak body A,B,C ležia na kružnici, tak môžeme potom tak dobre povedať, že žiaden z nich neleží medzi zvyšnými dvoma, ako vyhlásiť, že každý leží medzi zvyšnými dvoma. Pre pochopenie jednoduchý príklad. Niekto povie, že bod C leží medzi bodmi A a B ale niekto môže povedať, že to tak nieje, že napríklad bod A leží medzi bodmi C a B. Môžeme vidieť, že pojem „medzi“ pre body uzavretej krivky (kružnice) nemá zmysel. Aby sa dalo určiť usporiadanie bodov takejto krivky zavádza sa nový pojem, a to pojem oddeľovania dvojíc. Môžeme to napísať v tvare definície.

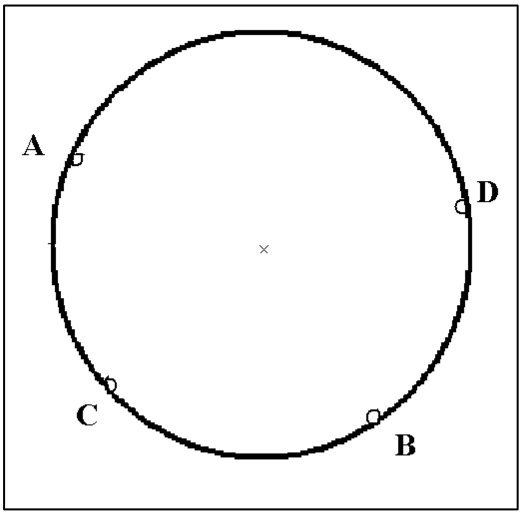


Obr.2 Usporiadanie bodov na priamke *p*

Dvojica C,D oddeľuje dvojicu A,B, ak nie je možné bod C (resp. D)pohybom po kružnici k stotožniť s bodom D (resp. C) bez toho, aby pri tomto pohybe neprešiel niektorým z bodov A,B.

Axióma usporiadania a axióma incidencie[1] sú zhodné s axiómami projektívnej geometrie. Vymenujeme si niektoré poučky Riemannovej geometrie, ktoré z týchto axióm vyplývajú.

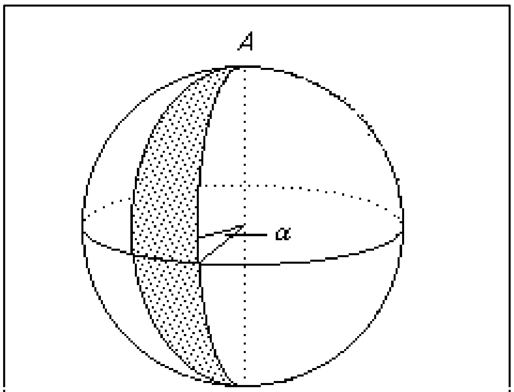
1. Každé dve priamky jednej roviny sa pretínajú.
2. Každé dve rôzne roviny sa pretínajú v jednej priamke.
3. Ľubovoľné dva rôzne body jednej priamky definujú na nej dve rôzne úsečky.
4. Priamka ležiaca v nejakej rovine nerozdeľuje túto rovinu na dve časti.
5. Rovina nerozdeľuje priestor na dve disjunktné časti.



Obr. 3 Pre pochopenie oddeľovania dvojíc bodov

Riemannova geometria je metrická, teda „meria“ geometrické veličiny ako uhly, dĺžky, obsahy. Tieto metrické vlastnosti „zmenšenej“ Riemanovskej roviny splývajú s metrickými vlastnosťami guľovej plochy. Môžeme povedať, že každý bod Riemannovej roviny má okolie, ktoré je izomorfné určitej časti guľovej plochy.

Ako model rovinnej Riemannovej geometrie môže poslúžiť guľová plocha v Euklidovskom priestore. Bodmi tejto roviny budeme rozumieť dvojice diametrálne položených bodov guľovej plochy A, A_1 (Obr. 4). Priamkami budeme chápať kružnice guľovej plochy . Sú to kružnice, ktoré sú prienikom guľovej plochy s rovinami prechádzajúcimi jej stredom S. Už z obrázka vidieť, že každé dve priamky sa pretnú v jednom bode[2].

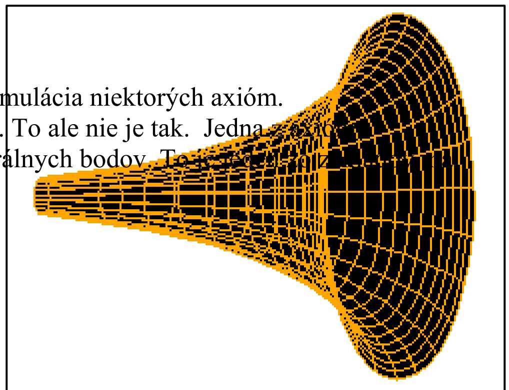


Obr. 4 Guľová plocha v Euklidovskom priestore

Teraz si pre porovnanie vysvetlíme niektoré rozdiely medzi Euklidovou, Lobačevského a Riemannovou geometriou.

Dôležitým kritériom je pojem Gaussovej krivosti. Táto krivosť sa mení od bodu k bodu ale v niektorých prípadoch je krivosť konštantná. Jedným z prípadov je, keď je krivosť rovná nule. V tejto ploche budú geodetické čiary (krivky, ktoré sú najkratšie spojnice dvoch ľubovoľných bodov roviny) priamky a budú platiť axiómy Euklidovej geometrie.

Ďalšou možnosťou je, že Gaussova krivosť bude nadobúdať záporné hodnoty, čiže dostaneme plochu so zápornou krivosťou. Pre



[1] V axiómach incidencie sa základný vzťah nemení ale mení sa formulácia niektorých axióm.
[2] Niekto by mohol namietať, že sa pretínajú v dvoch bodoch A, A´. To ale nie je tak. Jedna z axióm Riemannovej geometrie hovorí o tom, že bod tvorí dvojica diametrálnych bodov. [illegible] ktorom stojí geometria.

predstavu plochy z konštantnou zápornou krivosťou sa uvádza jednodielny hyperboloid, aj keď sa celá Lobačevského rovina nedá stotožniť s touto rovinou. Jednou z takýchto plôch, ktoré celkom dobre opisujú Lobačevského rovinu, je pseudosféra, ktorá vykazuje konštantnú zápornú krivosť. Jej tvar si môžeme predstaviť ako plochu, ktorá vznikne rotáciou krivky nazývanej traktrix (Obr. 5) okolo osi x. Parametrické rovnice tejto krivky sú:

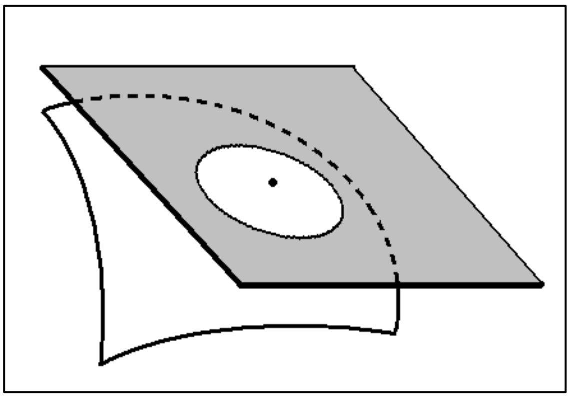
$$y = 1/\cos(t)$$
$$x = t - \mathrm{tg}(t)$$

nejaké časti Lobačovského roviny by sme si mohli predstaviť ako časti pseudosféry, aj keď nemôžeme stotožniť Lobačovského rovinu s celou pseudosférou. Z obrázku ale vidieť, že plocha je nekonečná a otvorená. S týmito vlastnosťami sa stretávame aj v Lobačovského priestore.

Riemannova rovina sa vyznačuje konštantnou kladnou Gaussovou krivosťou. Podobne aj pristor má tie vlastnosti a z toho vyplýva, priestory sú uzavreté a konečné, ako napríklad guľová plocha. Ani v tomto prípade nemôžeme stotožňovať celú Riemanovu rovinu s guľovou plochou.

Obr. 5 Pseudosféra

Teraz si povieme niečo o vlastnostiach bodov a geodetických čiar, ktoré ležia na všeobecnej ľubovoľnej ploche. Body môžeme rozdeliť do troch skupín. Prvá skupina sú eliptické (krivosť je kladná), druhú skupinu tvoria hyperbolické (krivosť je záporná) a tretia skupina sú parabolické body (krivosť je rovná nule).V okolí eliptického bodu je plocha podobná guľovej ploche, v tom zmysle, že leží v polpriestore určenom dotykovou rovinou v tomto bode. Ak dotykovú rovinu trochu posunieme v smere normáry plochy do polpriestoru, v ktorom leží plocha, pretne nám plochu v uzavretej krivke pripomínajúcej elipsu (Obr. 6). Geometria takýchto bodov a geodetických čiar sa v malom okolí približuje ku geometrii Riemannovej – eliptickej. V okolí hyperbolického bodu má plocha tvar sedla (hyperbolický paraboloid). Rovina nám pretne plochu v krivke podobnej hyperbole. V dostatočne malom okolí takéhoto bodu sa geometria správa ako Lobačevského geometria. Čiry, ktoré vzniknú pospájaním parabolických bodov sú akési rozhrania medz eliptickými a hyperbolickými bodmi.



Obr. 6 Okolie eliptického bodu

Ak si zoberieme priestor, ktorý sa mení od bodu k bodu, teda nejakú analógiu dvojrozmerného priestoru v E_3, budeme hovoriť o Všeobecnom Riemannovom preistore. Predstaviť si trojrozmerný Všeobecný Riemannov priestor môžeme ako nadplochu v Euklidovskom štvorrozmernom priestore.

Spomenuli sme niekoľko druhov geometrií (niektoré majú aj niekoľko rôznych modelov), ktoré popisujú priestor. Riemann vniesol do sveta troch rozmerov myšlienku štvor a viac- rozmerného sveta. na základe tých toprdstáv sa menil pohľad aj na priestor fyzikálny. Na základe zmien v geometrii sa zmenila aj podtata priestoru a usporiadania v ňom. Einstein zostrojil model vesmíru, ktorý je zakrivený. Jeho svet sa vplivom gravitácie zakrivuje a teda potreboval geometriu, ktorá by vyhovovala skutočnosti. Fyzikálny priestor sa už nezužoval len na súradnice priestorové ale rozšíril sa o ďalší rozmer a to čas. Jedným slovom sa to popisuje ako časopriestor. Jedným, kto sa tiež zaoberal geometriou časopriestoru, bol Minkovski.

Riemann zostrojil novú geometriu, ktorá ale nevylučuje výsledky Euklidovej geometrie ale ju len zovšeobecňuje. Nie sme schpní obsiahnuť priestor, v ktorom by sme boli schopní viditeľne odhaliť zákulisie neeuklidovskej Riemannovej geometrie.