

Fuzzy množiny

1. Úvod

Aj keď sa ľudstvo od počiatku snaží veci a vzťahy okolo seba spresňovať a vyjasňovať celkový obraz o svete, v ktorom žije, stále bolo vzhľadom na úroveň svojho poznania a techniky v danom čase konfrontované väčšou alebo menšou mierou neschopnosti plniť túto úlohu na 100%. Stále sú mnohé veci a vzťahy, ktoré nie je možné jednoznačne zatriediť do príslušnej zásuvky povestného „stola poznania“. Strach z nepresnosti, nejasnosti, neurčitosti, hmlistosti, či vágnosti, slovných pojmov, ktoré je možné zhrnúť do anglického slova „fuzzy“, bol a sčasti aj dnes je nočnou morou najmä európskej civilizácie. Aristotelov výrok zo 4. stor. pred Kristom: „*Všetko musí buď existovať alebo neexistovať, či už v súčasnosti alebo budúcnosti.*“, poznačil vedu a vôbec poznanie v ich základoch, t.j. v definícii týchto pojmov, ich rozsahu platnosti a spôsobov skúmania, ktoré si vedecká komunita neraz osobuje právo deliť na „korektné“ (rozumej oficiálnou vedou akceptované) a tie „ostatné“.

Nedá sa vôbec poprieť legitímnosť snahy byť čo najpresnejší, mať vo veciach jasno a vedieť ich správne klasifikovať. Tento prístup k riešeniu rôznych úloh priviedol našu civilizáciu na nebývalý stupeň vyspelosti, ale predsa práve na tomto pomyselnom vrchole sa otázka neurčitosti či nepresnosti snád práve preto stáva viac aktuálnou a riešenie vzťahov ako určitosť – neurčitosť, presnosť – nepresnosť a pod. pripomína podobné zemetrasenia v dejinách vedy ako vzťah Newtonovskej mechaniky verzus Einsteinova teória relativity, či metafyzika verzus Hegelova dialektika.

Práve úzkostná snaha po presnosti už v starovekom Grécku privádzala vtedajších mysliteľov na existenciu problému, či vždy existuje možnosť striktnej a pritom korektnej klasifikácie. Filozof Zeno si kládol otázku pri pohľade na kopy jemného morského piesku: „*Čo sa stane, ak z tejto kopy odoberie jedno nepatrné zrníčko piesku? Bude to ešte stále kopa?*“. Odpoveď by bola asi kladná. Zostala by ňou, aj keby sme odobrali hneď dvadsať zrníček, ale predsa pri neustálom odoberaní tá *kopa* sa raz musí zmeniť na *kôpku*. Kedy sa to stane? Koľko zrníček piesku maximálne smie mať jedna *kôpka* a keď pridáme ešte jedno zrnko, tak už bude *kopou*? Práve k takej rozpačitej otázke by sme sa dostali, ak by sme chceli úplne presne vymedziť hranicu medzi týmito dvomi pojmi. K podobnému problému sa dostávame pri otázke, či je voda teplá alebo studená, či je človek mladý alebo starý a pod. Naskytá sa tu otázka, či skutočne je existencia nepresnosti a neurčitosti spôsobená iba neexistenciou 100% presnosti a ak ju získame, prestane nepresnosť existovať. Nie je to náhodou tak, že nepresnosť (aj neurčitosť) sú rovnako integrálnymi súčasťami sveta ako je ňou presnosť? Hodne to pripomína analógiu k Heisenbergovmu princípu neurčitosti, pôvodne definovanému pre vzťah polohy a hybnosti telesa: „*O čo viac vieme presnejšie zistiť polohu telesa, o to menej presne vieme o jeho hybnosti a naopak.*“ Nakoniec pre nízke rýchlosti môžeme Newtonovsku mechaniku považovať za dostatočne presnú. Presne matematicky nám to vyjde pri zadefinovaní tejto obmedzujúcej podmienky zo vzťahov platných pre teóriu relativity. Newton sa tak stáva špeciálnym prípadom Einsteina. Nestáva sa preto aj presnosť iba špeciálnym prípadom nepresnosti?

Teória fuzzy množín sa snaží riešiť jeden z najzákladnejších problémov vedy, t.j. vzťah medzi presnosťou a nepresnosťou. Je to disciplína, ktorá sa počas svojej skoro štyridsaťročnej existencie zaslúžila o riešenie mnohých technických problémov, ktoré v praxi neboli inými prostriedkami zvládnuté. Osvedčila sa rádovo u niekoľko tisíc aplikácií v oblasti riadenia, diagnostiky, spracovania obrazov a prognostike. Je to matematicky snádň najlepšie spracovaná časť prostriedkov umelej inteligencie, pomocou ktorej môžeme simulovať veľkú časť procesov ľudského uvažovania a napriek tomu je to disciplína, ktorá ešte aj teraz má zarytých a nezmieriteľných odporcov – napriek tomu, že je to disciplína, ktorá nebúra doposiaľ poznané, ktorá sa snaží iba rozšíriť obzor poznania a sňať z našich očí klapky dvojhodnotového, čierneho-bieleho videnia sveta, ktoré mnohí považujú za jediné správne, lebo tam neurčitost' nemá šancu sa prejaviť. Svet áno – nie, platí – neplatí, čierna – biela, či 0 – 1 jednoducho inú alternatívu nepozná.

2. Základné princípy a vlastnosti fuzzy systémov

Klasická dvojhodnotová logika postupne začala narážať na problémy, známe ako logické paradoxy, ktoré nebolo možné riešiť iba pomocou kategórií platí – neplatí. Spomeňme iba dva z nich, ktorých veľkým „zberateľom“ (aj tvorcom) sa stal Bertrand Russell.

„Jeden klamár z Kréty prehlásil, že všetci Kréťania sú klamári.“ Tu sa dostávame do logického rozporu. Ak je pravda, že všetci Kréťania sú klamári, tak tento výrok je nepravdivý. Ved' ho povedal Kréťan a ten predsa klame. Ak nie je pravda, čo povedal tento Kréťan, t.j. z toho vyplýva: „Ani jeden Kréťan nie je klamár, čiže všetci Kréťania hovoria pravdu.“, zase sa dostávame do problému, nakoľko aspoň ten jeden klame (povedal nepravdivý výrok).

B. Russell bol tvorcom vlastného logického paradoxu holiča, ktorý si dal nad dvere vyvesiť štít s textom: „Holím všetkých a zároveň iba tých mužov, ktorí sa neholia sami.“ Prísne logicky vzaté, kto potom holí holiča? Ak sa holí sám, potom text na štíte nie je pravdivý (neplatí druhá časť výroku) a ak ho holí niekto iný, tak zase nie je výrok pravdivý, lebo neholí všetkých mužov, ktorí sa neholia. Skrátka, ako Kréťan, tak holič nemysleli v rámci svojich výrokov na seba samých. Hlavný paradox ale spočíva práve v tom, že tieto výroky v našom bežnom ľudskom uvažovaní by sme mohli kľudne akceptovať. Pre bežného človeka to nie sú žiadne paradoxy. Vieme akceptovať, ako píše Bart Kosko, jedna z najvýraznejších osobností v oblasti fuzzy systémov, že A a $nie-A$ platia do istej miery naraz v tom istom čase. Nedávame prísne deliacu hraničnú čiaru medzi *všetkým* a *ničím*. Prostriedky dvojhodnotovej logiky v podobe všeobecného a existenčného kvantifikátora nie sú dostatočné. Potrebovali by sme v týchto dvoch príkladoch aspoň niečo ako „skoro všetci Kréťania“, či „skoro všetkých mužov“. Potom by boli výroky pravdivé, ale toto nám dvojhodnotová logika nedovoľuje. Napokon, čo to znamená „skoro všetci“? Koľko je to? Veľmi ľahko by sme mohli nájsť príklady, kde by sme potrebovali použiť pojmy ako trochu, menej, viac, aj áno – aj nie, takmer a pod. Dostávame sa k tomu, že potrebujeme tieto slová bežnej ľudskej komunikácie nejako kvantifikovať a pojmy platí – neplatí nám nepostačujú.

V 20-tych až 30-tych rokoch 20. stor. poľský matematik Lukasiewicz prišiel s myšlienkou zaviesť viachodnotovú logiku a vypracoval dokonca aparát pre nekonečný počet logických hodnôt ako logiku L_∞ . Hodnoty 0 (neplatí) a 1 (platí) boli krajnými hodnotami tohto systému. Takto by sme mohli tvrdiť, že niečo platí (neplatí) do istej

miery. Napr. jednoročné dieťa je určite mladým človekom, storočný oslávenec je rozhodne starým človekom, ale ako je na tom tridsiatnik? Taký človek je v niečom ešte mladý a v niečom už starý. Tento paradox by sa dal odstrániť tým, že do istej miery platí aj jedno a do inej miery zároveň aj to druhé. Takto môžeme riešiť paradoxy Kréťana a aj holiča. Takto, ak kopa piesku už nie je taká veľká ale ani nie celkom malá, môžeme stanoviť s istou toleranciou (nepresnosťou, inými slovami fuzzy) hranicu medzi *kopou* a *kôpkou*. Nepresnosť či neurčitosť sa tu stávajú prostriedkami, ktorými môžeme riešiť problémy, ktoré sa jednoducho exaktnými prostriedkami riešiť nedali. Aristotelovské „*bud' A alebo nie-A*“ sa tu rozširuje na „*A a zároveň aj nie-A*“ (s istou mierou platnosti).

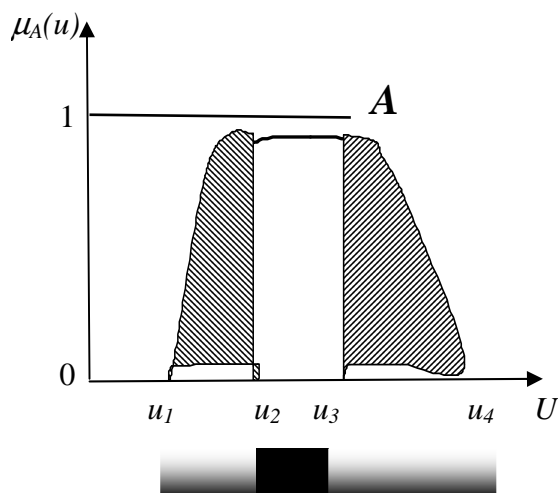
2.1 Základné koncepty fuzzy množín

Ako Lukasiewicz zaviedol do logiky viachodnotovosť a Russell pojem vágnosti, tak v 1937 lingvistický filozof Max Black sa pokúsil upraviť Kantorovu teóriu množín, ktorá dovtedy pracovala iba na princípe patrí – nepatrí, pre potreby zachytenia viacerých logických hodnôt, ako než sú iba dve. Definoval pojem vágnych množín, čím vlastne položil základy teórie fuzzy množín. Muselo však uplynúť ďalších skoro 30 rokov, keď Prof. Lotfi A. Zadeh v roku 1965 publikoval článok s príznačným názvom „*Fuzzy množiny*“. V svojich ďalších prácach vytvoril základy celého aparátu, kde dva koncepty tvoria hlavné stavebné kamene tejto disciplíny, ktorá prenikla do skoro všetkých aplikačných oblastí počítačov.

Prvým a úplne základným konceptom je samotná **fuzzy množina** (FM), ktorá je definovaná (označme si ju symbolom A) ako množina prvkov $u \in U$ (U je tzv. univerzum), kde každému z nich je priradený *stupeň príslušnosti* $\mu_A(u)$, ktorého hodnoty sa pohybujú v rozmedzí $[0; 1]$ a matematicky sa dá zapísať v podobe:

$$A = \{(u, \mu(u)), u \in U\}.$$

Keď vynesieme všetky skúmané prvky do grafu, dostaneme funkčné zobrazenie v podobe *funkcie príslušnosti*, kde je vidieť, že prechod od príslušnosti „*daný prvok určite nepatrí do množiny – 0*“ k príslušnosti „*daný prvok určite patrí do množiny – 1*“ je pozvoľný, vzniká isté pásmo, kde príslušnosť prvku u do množiny A nie je jednoznačná, t.j. je neurčitá, čiže fuzzy. Ak by sme si pomohli predstavou z čierneho bieleho sveta, tak absolútne čierna a absolútne biela sú krajné stavy. Práve zavedenie neurčitosti, t.j. stupňov príslušnosti aj iných hodnôt ako iba 0 alebo 1 nám umožňuje si definovať aj rôzne stupne šede. Realitu takto budeme môcť vnímať omnoho citlivejšie a jemnejšie. Klasická dvojhodnotová množinová matematika sa tu javí iba ako špeciálny prípad fuzzy množín, ak by sme vnímali iba a iba absolútne čiernu a absolútne bielu farbu.

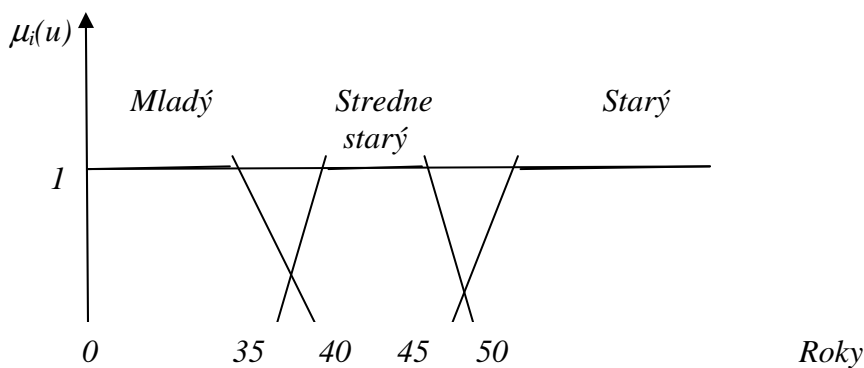


Obrázok 1. Príklad fuzzy množiny A . Vyšrafované časti predstavujú prvky u univerza U so stupňami príslušnosti medzi 0 a 1 . Prvky menšie ako u_1 alebo väčšie ako u_4 do množiny určite nepatria (biela farba), prvky medzi u_2 a u_3 do množiny určite patria (čierna farba). Ostatné prvky patria s istým stupňom šede.

V skutočnosti máme vlastne možnosť presnejšie vnímať realitu, nakoľko pri dvojhodnotovom vnímaní sa musíme veľmi ostro rozhodnúť, kam daný stav patrí, tým dochádza k silnému a nepresnému zaokrúhľovaniu, čo môže viesť k veľkým chybám, vid' príklad s kopou piesku, keď rozdiel jedného malého zrníčka môže viesť k diametrálne rozdielnym záverom. Tu vzniká zdanlivý paradox, keď sa presnosť zvýši pri akceptovaní práce s neurčitost'ou.

V ľudskej reči sa vyskytuje veľmi veľa tzv. *neurčitých lingvistických (jazykových) výrazov* ako napr. pomalý, teplý, starý, trochu, stredne, ktoré ľudia často používajú a dokážu s ich pomocou veľmi efektívne komunikovať. Práve aparát fuzzy množín dokáže kvantifikovať tieto výrazy v číselnej podobe pomocou funkcií príslušnosti a takto túto informáciu preniesť aj do počítača.

Ďalším nadstavbovým konceptom sa javí pojem **lingvistická premenná (LP)**. Predstavuje most medzi symbolickou a číselnou formou reprezentáciou reality. Ukazuje, že popisovaný objekt môže mať symbolickú a zároveň číselnú významovú rovinu. V konečnom dôsledku umožňuje vzájomnú transformáciu týchto dvoch typov reprezentácií. LP je nadstavbou nad už definovanú FM a umožňuje vytvárať množinu viacerých navzájom súvisiacich FM. Jej definíciu si ozrejmime na príklade veku človeka, ako je to na obr. 2.



Obrázok 2. Príklad lingvistickej premennej *Vek človeka*.

Pojem „*Vek človeka*“ predstavuje názov tejto LP, označovaný ako Γ , ktorý charakterizuje spoločný rys takto definovaných FM, popisujúcich rôzne vekové kategórie ľudského jedinca. Vystupuje tu symbolická úroveň vo forme slovných hodnôt *mladý*, *stredne starý* a *starý*, ktoré spolu tvoria tzv. *term množinu T*. Priradenie jednotlivých funkcií príslušnosti, ktoré sú číselnými kvantifikáciami jednotlivých pojmov nad univerzom U (napr. množina prirodzených čísiel), k samotným prvkom term množiny je vykonané pomocou sématických pravidiel M , čím sa im priradí ich význam. Pre úplnosť definície LP dodajme, že sa ešte definujú aj syntaktické pravidlá G , pomocou ktorých je možné konštruovať slovné hodnoty (napr. *stredne starý* z pojmov *starý* a *stredný*), takže vo všeobecnosti je možné LP definovať ako usporiadanú päťicu:

$$LP = (\Gamma, T, U, G, M).$$

Takýmto spôsobom si môžeme zdefinovať celé kategórie ako napr. rýchlosť, teplota, veľkosť otáčok, množstvo a pod. Sú to síce premenné, ale na rozdiel od klasických číselných tieto používajú ako hodnoty slová (mladý, stredne mladý, starý a pod.), preto názov lingvistickej (jazykovej) premennej je tu na mieste.

Tento koncept nielen, že umožňuje s využitím vhodných operátorov realizovať množinové operácie ako zjednotenie, prienik a doplnok, ale umožňuje využitie fuzzy množín v matematickej logike, čím sa dostávame k pojmu fuzzy logika.

Za zmienku stoja aj iné koncepty, napr. *princíp rozšírenia* umožňujúci definovať fuzzy aritmetiku, a tým pracovať s neurčitosťou na úrovni numerických výpočtov.

Použitá literatura:

1. Výber z prednášok - Ján Vaščák, Katedra kybernetiky a umelej inteligencie, FEI TU Košice.
2. http://neuron.tuke.sk/~duraskova/fr/Prednasky_FR.pdf.
3. POKORNÝ, Miroslav. Řídící systémy se znalostní bází. 1.vyd. VŠB –TU Ostrava, 1999.