Katedra matematiky

Pedagogická fakulta Katolícka univerzita v Ružomberku

Semestrálna práca s predmetu História matematiky

Prvky algebraického myslenia v antickej matematike

Školský rok: 2006/2007

Ročník: štvrtý

Mária Kormaňáková

Úvod

Kým Slovania prišli na naše územie okolo roku 800, a teda kultúrna kontinuita na tomto území trvá zhruba 12 storočí, helénska kultúra na území grécka má kontinuitu, od 8. storočia pred naším letopočtom (homérska doba, vznik *Iliady* a *Odyssee*) až po rok 1453, kedy Turci dobyli Carihrad, čo je približne 22 storočí. Je samozrejmé, že počas tohto veľkého časového rozpätia mala grécka kultúra rôznorodé podoby, z ktorých niektoré boli pre rozvoj matematiky priaznivé, iné naopak priniesli v tejto oblasti úpadok.

Pytagorejský objav nesúmerateľnosti

Prvá matematická symbolika, ktorá obsahovala niečo, čo pripomína pojem neznámej, pochádza od Pytagorejcov. Pytagorejci zobrazovali čísla pomocou bodiek, ktoré zoskupovali do geometrických útvarov. Takto vytvorili tzv. figurálne čísla : trojuholníkové čísla (1, 3, 6,...), štvorcové čísla (1, 4, 9,...) a pod. Tento geometrický jazyk im umožňoval dokázať tvrdenia, ktoré dnes väčšinou zapisujeme algebraicky, napríklad, že súčet dvoch po sebe idúcich trojuholníkových čísel je číslo štvorcové.

Jedným z objavov, pripisovaných samotnému Pytagorovi je Pytagorova veta, podľa ktorej v pravouhlom trojuholníku je súčet štvorcov nad odvesnami rovný štvorcu nad preponou. Teoretický význam tejto vety spočíva v tom, že ukazuje, že čísla determinujú tvar. Teda to, či je trojuholník ostrouhlý, tupouhlý alebo pravouhlý, je dané vzťahom medzi číslami, udávajúcimi dĺžky jeho strán. Pytagoras objavil podobnú číselnú zákonitosť aj pri hudbe, kde zas zvuk strún znie harmonicky, keď sú závažia ktoré napínajú struny, v celočíselných pomeroch. Teda čísla determinujú hudobnú harmóniu. Odtiaľto už nie je ďaleko k hlavnej téze pytagorejskej filozofie, že totiž svet je harmóniou protikladov, vyjadrených pomocou čísiel.

Najvýznamnejším objavom pytagorejcov je objav nesúmerateľnosti strany a uhlopriečky štvorca. Je to vlastne prvý príklad dôkazu sporom a ukazuje, že pytagorejci sa v chápaní matematiky posúvajú od nazerania k dedukcii. Grécke slovo pre dokazovať znamená ako ukazovať tak aj dokazovať. Historici matematiky vo všeobecnosti uznávajú, že prvé dôkazy, ktoré pytagorejci robili pomocou svojich figurálnych čísel, spočívali v tom, že ukázali, že príslušné tvrdenie je pravdivé, že jeho pravdivosť priviedli pred oči. Ale nesúmerateľnosť sa nedá ukázať, to nie je fakt, ktorý by sa dal priviesť k názoru. Ľubovolné dve úsečky nakreslené na papieri sú súmerateľné, lebo každá z nich obsahuje celočíselný počet atómov uhlíka. Inak povedané, každý názor má svoju rozlišovaciu schopnosť, ale na objavenie nesúmerateľnosti potrebujeme absolútnu rozlišovaciu silu, akú má jedine rozum. Teda nesúmerateľnosť nie je pravdou zmyslov, ale pravdou rozumu. Žiadna civilizácia pred Grékmi nič podobného nepoznala. Gréci sú prví, ktorí opúšťajú svet zmyslov a objavujú vedľa tohto sveta iný, neviditeľný svet matematických právd. Pomocou zmyslov by sa nikdy nič podobného nepodarilo objaviť. Preto Gréci zavádzajú rozlíšenie, ktoré nemá obdoby v žiadnom inom jazyku - gréčtina má dva pojmy pre pravdu. Na jednej strane je pravda zmyslov, prekladaná ako zdanie, mienka predstava, a oproti nej stojí pravda rozumu, prekladaná ako vedenie, znalosť. Nesúmerateľnosť je teda príkladom , jedným z vôbec najčistejších príkladov tohto pojmu.

Napriek tomu, že objav nesúmerateľnosti predstavoval veľký úspech pytagorejskej matematiky, priniesol aj jej hlbokú krízu. Ukázal, že už tak jednoduchú vec ako je pomer strany a uhlopriečky vo štvorci nie je možné vyjadriť pomocou čísel. Teda čísla sú nevhodné ako základ matematiky. Preto bolo treba vybudovať úplne iné základy matematiky, a všetky dôkazy, ktoré pytagorejci robili pomocou svojich figurálnych čísel, prerobiť tak, aby platili aj pre prípad nesúmerateľných veličín. Tejto úlohy sa ujal Eudoxos z Knidu, a vytvoril teóriu proporcií.

Eudoxova teória proporcii

Eudoxova teória proporcií sa zachovala V knihe Euklidových Základov. Dnes prevláda názor, že Euklidove Základy sú len sčasti originálnym výtvorom samotného Euklida, a mnohé partie naopak Euklides prebral z ranejších matematických diel, ktoré sa nedochovali. Okrem teórie proporcií Euklides prebral od Eudoxa aj metódu exhaustácie, ktorá je obsiahnutá v XII. knihe, od Thaiteta prebral klasifikáciu iracionalít obsiahnutú v X. knihe a od Archyta z Tarentu prebral teóriu čísel, obsiahnutú v VII.-IX. knihe. Euklidovým originálnym výkonom je logické usporiadanie príslušných teórií, a najmä teória Platónskych telies, ktorá je obsiahnutá v XIII. knihe, a tvorí vrchol Euklidovho diela.

Eudoxova teória proporcií je síce jedinou teóriou, ktorá sa nám dochovala vďaka Euklidovi, nie je však prvou teóriou proporcií, ktorú Gréci vytvorili ako odpoveď na objav nesúmerateľnosti. Pred ňou existovala teória staršia, ktorá sa síce nedochovala, ale ktorú sa podarilo rekonštruovať v tridsiatych rokoch nemeckému historikovi matematiky Oskarovi Beckerovi. Jej základnou ideou je procedúra, ktorá je dnes známa pod názvom Euklidov algoritmus. Keď zoberieme dve veličiny X a Y nezávisle od toho, či sú súmerateľné alebo nie, môžeme odobrať menšiu od väčšej určitý celočíselný počet krát, až vznikne zvyšok, ktorý bude menší, ako bola menšia z nich, teda $X = n_0Y + X_1$. Teraz môžeme uberať zvyšok od menšej čím dostaneme $Y = n_1X_1 + X_2$. Keď tento proces skončí po konečnom počte krokov, tak sú príslušné veličiny súmerateľné a posledný zvyšok je ich spoločnou mierou. V nesúmerateľnom prípade tento proces postupného uberania pokračuje do nekonečna a dostávame tak nekonečnú postupnosť čísel n_0, n_1,... V prípade súmerateľných veličín to znamená, že sú v rovnakom pomere merané ich spoločnou mierou. V prípade nesúmerateľných veličín sa musia jednoducho zhodovať príslušné číselné postupnosti. Opísaný postup sa v podstate zhoduje s rozkladom do reťazového zlomku, pričom racionálne čísla majú konečný a iracionálny nekonečný reťazový zlomok.

Eudoxova teória sa zakladá na nasledovnej definícii:

„*Hovoríme, že veličiny stoja v rovnakom pomere, prvá k druhej ako tretia ku štvrtej, keď pri ľubovoľnom vynásobení rovnaké násobky prvej a tretej oproti rovnakým násobkom druhej a štvrtej, vzaté v pároch sú alebo naraz väčšie alebo naraz rovné alebo naraz menšie*.“

Zapísané v modernej symbolike to znamená, že *a* ku *b* je v rovnakom pomere ako *c* ku *d*, ak pre ľubovoľné *m* a *n* veličiny *ma* a *mc* sú obe súčasne väčšie, rovné, alebo menšie, ako príslušné veličiny *nb* a *nd*. Táto definícia je nepomerne stručnejšia, a oslobodzuje nás od zdĺhavej nutnosti hľadať príslušné čiastočné podiely a zvyšky. Pritom táto definícia bola základom všetkých výpočtov obsahov a objemov u Euklida a Archimeda. Jej význam pre dejiny algebry spočíva v tom, že umožňuje úplné opustenie čísel ako základu matematiky, a s tým spojenú naprostú geometrizáciu celej antickej matematiky, ako sa s ňou stretáme u Euklida. Keď Euklides dokazuje nejakú vetu z teórie čísel, dokazuje ju geometricky. Podobne dáva geometrický tvar aj problémom, ktoré my považujeme za algebraické. Namiesto riešenia kvadratických rovníc tak Euklides geometricky konštruuje ich korene. V tejto súvislosti sa preto hovorí o tzv. *geometrickej algebre*.

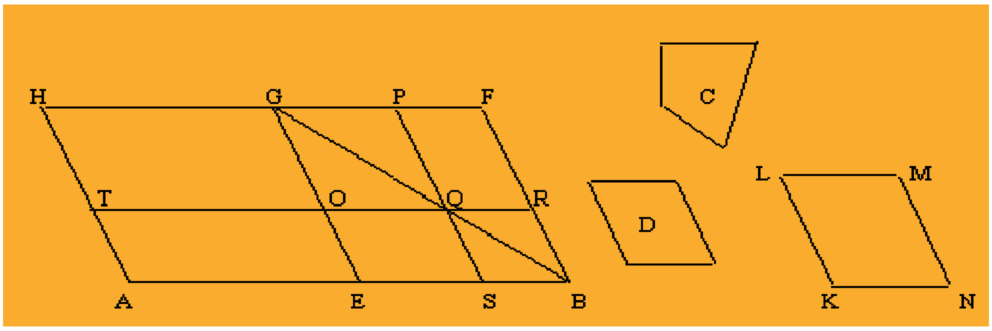
Euklidova geometrická algebra

Úlohy, ktoré dnes formulujeme ako kvadratické rovnice, formuloval Euklides ako problémy na prikladanie plôch.

Úloha : *„K danej úsečke treba priložiť rovnobežník, rovný danému mnohouholníku tak, aby chýbal obdĺžnik, podobný danému rovnobežníku."*

Nech AB je daná úsečka, C daný mnohouholník, ktorému má byť rovný rovnobežník priložený k AB a D nech je rovnobežník, ktorému má byť podobný defekt. Teda sa vyžaduje priložiť k danej úsečke AB rovnobežník rovný danému mnohouholníku C a deficientný o rovnobežník, podobný s D.

Nech AB je rozpolené v bode E, a na EB nech EBFG je pripísaný podobný a podobne umiestnený s D, a nech je doplnený rovnobežník AG.



Ak je AG rovné C, tak to čo bolo zaumienené, bolo dosiahnuté, lebo rovnobežník AG rovný danému mnohouholníku C bol priložený k úsečke AB s nedostatkom v tvare rovnobežníka GB, ktorý je podobný D.

Ale ak nie, nech HE je väčšie ako **C**. Teraz, HE je rovné GB, preto GB je tiež väčšie než C. Nech KLMN je zostrojené naraz rovné presahu, o ktorý je GB väčšie než C a podobné a podobne umiestnený ako D.

Ale D je podobné s GB, preto KM je tiež podobné GB. Nech teda KL korešponduje GE a LM korešponduje GF. Teraz, keďže GB je zhodné s C + KM, preto GB je väčšie než KM. Preto GE je väčšie ako KL a GF je väčšie ako LM.

Nech je GO urobené rovným s KL a GP rovným s LM, a nech je doplnený rovnobežník OGPQ. Preto je rovný a podobný s KM. Preto GQ je podobné s GB, preto GQ je nad tou istou priečkou ako GB. Nech GQB je ic priečka a nech obrazec je vpísaný. Potom, keďže BG je rovné C + KM, a GQ je rovné KM, preto zvyšok, teda gnomón GFBQ je rovný zvyšku C.

A keďže PR je rovné OS, nech QB je pridané k obom. Preto celé PB je rovné celému OB. Ale OB je rovné TE, lebo strana AE je rovná strane EB. Preto TE je tiež rovné PB. Pridajme OS k obom, potom celé TS je rovné celému gnomónu GFBQ. Ale už bolo dokázané, že gnomón GFBQ je rovný C. Preto TS je tiež rovný C.

Preto k danej úsečke AB bol priložený rovnobežník TS, rovný danému mnohouholníku C a s nedostatkom v tvare rovnobežníka QB ktorý je podobný s D.

Nie je ťažké nahliadnuť, že v prípade, keď rovnobežník D je štvorec, tak Euklidova konštrukcia predstavuje riešenie rovnice

$$\mathbf{b.x - x^2 = C.}$$

Vyššie uvedená konštrukcia sa nazývala eliptickým priložením plochy, lebo plocha C nie je priložená k celej úsečke AB ale len jej časti, teda je to priloženie s nedostatkom. Okrem nej existuje ešte parabolické priloženie plochy kedy sa daná plocha C priloží k celej úsečke AB, a nakoniec hyperbolické priloženie plochy kedy daná plocha bude presahovať za hranice úsečky AB.

Uvedené Euklidove konštrukcie sú v podstate ekvivalentné s riešením kvadratickej rovnice. Pritom základná idea konštrukcie je tá istá, akú používame aj pri algebraickom postupe, a to doplnenie na úplný štvorec. Napríklad v uvedenom prípade by sme obe strany rovnice doplnili o - $b^2/4$,

$$\mathbf{- b^2/4 + b.x - x^2 = C - b^2/4.}$$

alebo

$$\mathbf{b^2/4 - b.x + x^2 = b^2/4 - C.}$$

A Euklides postupuje rovnako, keď rozdelí úsečku AB napoly, urobí nad ňou rovnobežník a zoberie plochu, o ktorú tento rovnobežník presahuje C. Teda KLMN zodpovedá nášmu $b^2/4$ - C. Konštrukcia obdĺžnika GOPQ je vlastne ekvivalentná nášmu odmocneniu oboch strán rovnice, lebo určí dĺžku hladanej veličiny x v tvare

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - C}$$

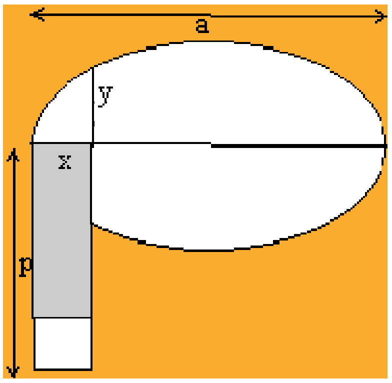
čo je ekvivalentné formuli pre riešenie kvadratickej rovnice.

Samozrejme, táto formula dáva reálne riešenie len za predpokladu, že rozdiel pod odmocninou je kladný. Tejto podmienky si bol vedomý aj Euklides, a preto zadanie úlohy doplnil o podmienku:„*... pričom daný mnohouholník nesmie byť väčší ako rovnobežník podobný zostaku a narysovaný nad polovicou zadanej úsečky.*“

Na Euklidovej teórii prikladania plôch je zaujímavé, že práve tu sa slová eliptický, parabolický a hyperbolický dostávajú do matematiky. Teda tu ešte chápeme súvis týchto slov s významom, aký majú v poetike, kde elipsa znamená vynechani slova z básne**, parabola** znamená prirovnanie a hyperbola označuje určité preháňanie. Tieto významy sa plne kryjú s tým, ako tieto slová používa Euklides, keď eliptická konštrukcia vynecháva, parabolická prirovnáva a hyperbolická presahuje predpísanú úsečku. Zhruba sto rokov po Euklidovi prichádza Apollonios z Pergy, ktorý objavil, že konštrukcie prikladania plôch umožňujú skonštruovať kuželosečky. Uvažujme napríklad elipsu. Jej rovnica je

$$y^2 = x\left(p - \frac{p}{a}x\right)$$

kde x-ová os predstavuje ľubovoľný priemer elipsy, a y-ovú os tvorí dotyčnica k elipse v jej jednom koncovom bode.



Vidíme, že rovnica elipsy vlastne znamená, že keď máme danú veličinu y, tak prislúchajúcu hodnotu x dostaneme, keď k úsečke p elipticky priložíme plochu y^2 tak, aby nedostatok mal tvar obdĺžnika, ktorého strany sú v pomere 1 : p/a. Euklidova konštrukcia to umožňuje spraviť, a teda každý bod elipsy možno zostrojiť pomocou kružitka a pravítka.

Jednotlivé kužeľosečky tak dostali svoje mená podľa príslušnej konštrukcie na prikladanie plôch, ktorá umožňuje zostrojiť body príslušnej kužeľosečky. Neskôr, keď postupy eliptického, parabolického a hyperbolického prikladanie plôch stratili význam, názvy jednotlivých konštrukcií upadli do zabudnutia. Vznikla však záhada, čo majú názvy kužeľosečiek spoločné s termínmi z poetiky.

Diofantova aritmetika

Prechodom k Diofantovi urobíme skok o zhruba 450 rokov z alexandrijského obdobia do obdobia rímskej nadvlády. Diofantos napísal dielo s názvom Aritmetika, ktoré pôvodne pozostávalo s 13 kníh. V islamskom svete sa dochovalo prvých 7 kníh, naproti tomu z byzancie sa dochovelo 6 kníh, a to prvé tri a tri neskoršie. Takže v súčasnosti je z pôvodných 13 kníh známych len 10.

U Diofanta sa stretávame s prvou variantou algebraickej symboliky. Diofantos zavádza znak pre neznámu a rôzne jej mocniny, znak pre rovnosť a aj znak pre odčítanie. Väčšinu jeho symbolov tvoria skratky zodpovedajúcich termínov. Pritom, ako naznačuje už názov knihy, Diofanta nezaujíma nesúmerateľnosť, lebo jeho premenné označujú výlučne čísla.

Pre Diofanta je typické, že úlohy riešil pomocou duchaplných trikov, ktoré sú naprosto ad hoc, a teda čo príklad, to nový trik. O nejakých všeobecnejších metódach nie je u neho ani stopy. Preto pre súčasného matematika je skoro nemožné po naštudovaní 100 Diofantových úloh vyriešiť jeho 101. úlohu.