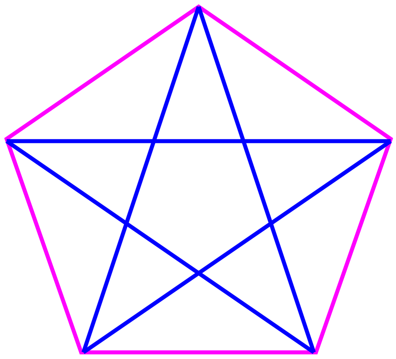
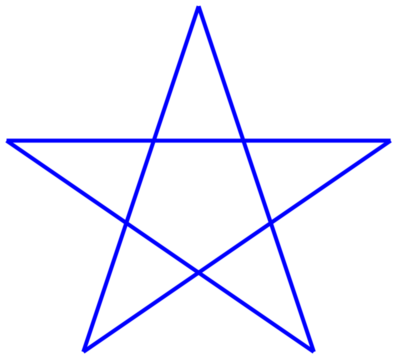
Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku

História matematiky
Konštrukcia pravidelných n-uholníkov

Monika Kasagrandová **ak. rok: 2005/2006**
matematika/náboženstvo **4. ročník**

Z pravidelných mnohouholníkov upútali pozornosť človeka najprv rovnostranný trojuholník, štvorec, pravidelný päťuholník a pravidelný šesťuholník. Už slávny starogrécky matematik Pytagoras (6. stor. pred n. l.) vedel, že všetky tieto štyri mnohouholníky možno presne zostrojiť pravítkom a kružidlom. Skutočnosť, že starí Gréci sa zaoberali konštrukciami pravidelných mnohouholníkov svedčí o tom, že tieto útvary potrebovali pri svojich remeslách, staviteľstve a bežnej dennej práci. Neboli to však vždy len umelecké ornamenty a pôdorysy stavieb pri ktorých sa používali uvedené geometrické obrazce. Staroveký a stredoveký človek včleňoval často tieto útvary do svojich povier a pripisoval im kúzelnú moc. Veľmi známe bolo najmä znamenie päťuholníka, ktoré sa stalo odznakom čarodejov a "temných síl".





Dnešný človek hľadí s úsmevom na tieto názory, lebo dokáže oddeliť zdravé jadro od nánosu povier. Dodnes nestratili vedeckú cenu napr. výskumy, ktoré vykonali učenci minulých storočí v konštrukciách pravítkom a kružidlom. Ako príklad uveďme konštrukciu pravidelného päťuholníka pravítkom a kružidlom. Zostrojíme kružnicu ***k*** so stredom ***O*** a polomerom ***r***, zvoľme v nej priemer A_1OM a zostrojme pomocnú kružnicu ***l*** so stredom A_1 a polomerom ***r***. Obidve kružnice ***k, l*** sa pretínajú v bodoch ***X, Y***, takže ***XY*** je os úsečky A_1O, priesečník ***S*** priamok A_1O***, XY*** je stredom úsečky A_1O. Opíšme ďalej kružnicu ***m***, ktorá má stred ***S*** a prechádza bodom ***B*** (bod ***B*** je jedným z koncový bodov priemeru kolmého na priemer A_1OM). Ak označíme **C** spoločný bod kružnice ***m*** a polpriamky ***OM***, možno dokázať, že úsečka ***BC*** je stranou hľadaného pravidelného päťuholníka.

Už v Euklidovej dobe (300 rokov pred n. l.)bolo známe, že niektoré pravidelné mnohouholníky možno konštruovať pomocou pravítka a kružidla, tj. euklidovsky. Napríklad trojuholník, štvoruholník, päťuholník a tie, ktoré môžu vzniknúť zdvojnásobovaním počtu strán. Pravidelný sedemuholník bol ďalší obrazec, o ktorého konštrukciu sa pokúšal už v staroveku Archimedes (3. stor. pred. n. l.). Dlhoročné pokusy mnohých matematikov ukazovali, že pravdepodobne nemožno tento mnohouholník pravítkom a kružidlom presne zostrojiť. Boli však nájdené približné konštrukcie, ktoré sa dotýkajú tejto otázky. .Až do 18. storočia nedošlo k rozšíreniu gréckeho spôsobu tejto geometrickej práce. V roku 1796 dokázal mladý nemecký matematik Gauss, že možno euklidovsky skonštruovať aj pravidelný sedemnásťuholník. Tento objav ho natrvalo pripútal k matematike. Neskôr uzavrel tieto výskumy tým, že zistil, ktoré pravidelné mnohouholníky možno zostrojiť pravítkom a kružidlom a ktoré nie. Platí totiž veta: Pravidelný n-uholník možno zostrojiť pravítkom a kružidlom práve vtedy, ak a je číslo tvaru.

$$n = 2s * p_1 * p_2 ******** p_k$$

kde ***s*** je celé kladné číslo alebo nula a $\boldsymbol{p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_k}$ sú navzájom rôzne prvočísla tvaru $\boldsymbol{2^m+1}$. Z tejto vety vyplýva, že pravidelný sedemuholník nemožno zostrojiť pravítkom a kružidlom. Lebo prvočíslo 7 nie je tvaru 2^m+1. Naproti tomu pravidelný sedemnásťuholník možno s použitím uvedených dvoch rysovacích pomôcok zostrojiť, lebo $17 = 2^4+1$. Z tejto vety vyplýva, že pravítkom a kružidlom sú konštruovateľné pravidelné n-uholníky pre n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, ... a nie sú konštruovateľné pravidelné n-uholníky pre n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, .… Túto konštrukciu zistil Gauss už ako devätnásťročný mladík. Možno vtedy začal tušiť, že matematika je kráľovnou vied a teória čísel je kráľovnou matematiky. Na pamiatku jeho prvého veľkého matematického objavu vytesali na náhrobnom kameni „kniežaťu matematikov“ C. F. Gaussovi kružnicu s vpísaným pravidelným sedemnásťuholníkom

Ako si budeme v praxi počínať, ak máme zostrojiť pravidelný mnohouholník s väčším počtom strán (súčiastku, ornament)? Najlepšie je voliť metódu výpočtom, lebo geometrická konštrukcia vždy zaťaží výsledok drobnými chybami, ktoré sú zapríčinené nedokonalosťou rysovacích pomôcok. Naproti tomu výpočet možno robiť obvykle s takou presnosťou, akú potrebujeme. Môžeme zostaviť tabuľku, ktorá nám úlohu uľahčí. V prvom stĺpci tabuľky je uvedený počet strán pravidelného n-uholníka, v druhom stĺpci nájdeme približnú hodnotu zlomku ***r/a***, kde **r** je polomer kružnice opísanej n-uholníku a ***a*** je strana n-uholníka.

n	r/a	n	r/a	n	r/a
3	0.577	9	1.462	15	2.405
4	0.707	10	10618	16	2.563
5	0.851	11	1.775	17	2.721
6	1.000	12	1.932	18	2.879
7	1.152	13	2.089	19	3.038
8	1.307	14	2.247	20	3.196

Príklad:

1) Daný je pravidelný n-uholník $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$. Označme a veľkosť jeho strany, r je polomer kružnice opísanej n-uhoníku. Vypočítajte podiel r/a.

Pri riešení použijeme goniometrické funkcie. Označíme O stred kružnice opísanej danému n-uholníku. Trojuholník A_1A_2O je rovnoramenný s ramenami OA_1, OA_2, ktorých veľkosť sa rovná polomeru r. Veľkosť uhla A_1OA_2 je $\omega = \frac{360°}{n}$. V trojuholníku A_1A_2O veďme výšku OB

Trojuholník OBA_1 je pravouhlý a platí, že $OA_1 = r$, $A_1B = a/2$, uhol $A_1OB = 1/2\ \omega$.

Pomer A_1B/OA_1 sa rovná sínusu uhla $1/2\ \omega$, teda $\frac{A_1B}{OA_1} = \sin \frac{1}{2}\omega$

Po dosadení máme $\frac{a/2}{r} = \sin \frac{180}{n}$

Ďalšou úpravou dostaneme: $\frac{r}{a} = \frac{1}{2 \sin 180°/n}$

Tým je hľadaný pomer vypočítaný.

2) Zostrojte pravidelný sedemnásťuholník. Budeme vychádzať z predchádzajúceho príkladu.

n = 17 platí, že $180°/17 = 10°35'18''$.

V ďalšom výpočte použijeme štvormiestne logaritmické tabuľky:

$\log r/a = -\log 2 - \log \sin 10°35'18'' = -0{,}3010 - (9{,}2642 - 10) = 0{,}4348$.

Z toho vyplýva, že $r/a = 2{,}721$.

Ak máme teraz napr. zostrojiť pravidelný sedemnásťuholník so stranou a = 4 cm, budeme v praxi postupovať takto: Z tabuľky vyhľadáme, že pre sedemnásťuholník platí $r/a = 2{,}721$, teda polomer kružnice opísanej nášmu sedemnásť uholníku $r = 4 * 2{,}721 = 10{,}884$. Po zaokrúhlení máme $r = 10{,}9$ ***cm***. Zostrojíme teda kružnicu s polomerom 10,9 cm a na jej obvod nanesieme sedemnásťkrát dĺžku 4 cm. Takto je pravidelný sedemnásť uholník približne zostrojený.