Katolícka univerzita v Ružomberku, Pedagogická fakulta

TEÓRIA GRAFOV

(História matematiky – referát)

Mária Házyová

4.ročník

M – I – Nv

Teória grafov

Teória grafov je časť matematiky, ktorá skúma vlastnosti grafov. Skôr však, ako sa začneme zaoberať teóriou, potrebujeme si definovať, čo rozumieme pod samotným pojmom graf.

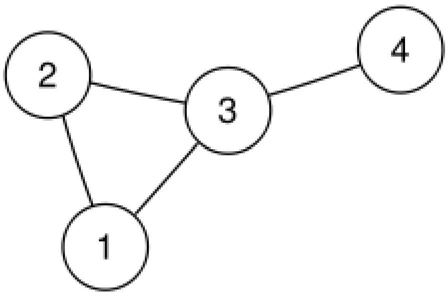
Graf je abstraktný matematický objekt daný množinou vrcholov V a množinou hrán H medzi dvojicami vrcholov. Grafy študuje matematická disciplína ***teória grafov***. Poznáme dva „druhy“ grafov a to:

Neorientovaný graf

Graf alebo **neorientovaný graf** G je usporiadaná dvojica $G = (V, H)$, kde:

- V je neprázdna konečná množina **vrcholov** grafu,
- H je množina neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u \neq v$, nazývaných **hrany** grafu.

Príklad neorientovaného grafu:



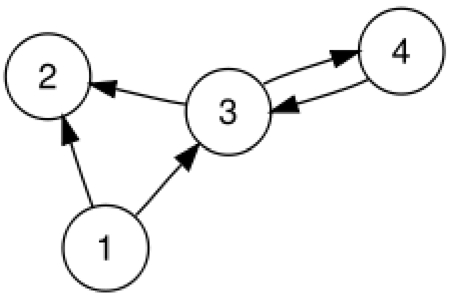
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$H = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}\}$

Orientovaný graf

Orientovaný graf alebo **digraf** G je usporiadaná dvojica $G = (V, H)$, kde:

- V je neprázdna konečná množina **vrcholov** grafu,
- H je množina usporiadaných dvojíc typu (u, v), kde $u \neq v$, nazývaných **orientované hrany** grafu.

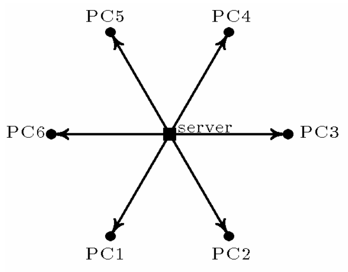
Príklad digrafu:

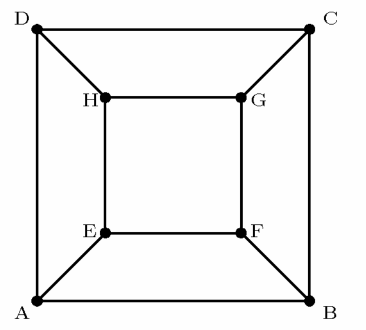


$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$H = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

Diagram grafu a niektoré dôležité pojmy:

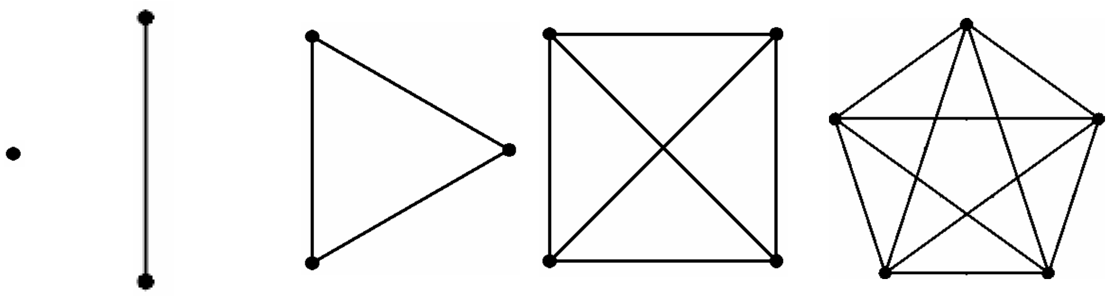
Jednoduchšie grafy je možné zobraziť do roviny; vrcholy sa väčšinou zobrazujú ako krúžky či bodky a hrany ako čiary. Ako napr. Zobrazuje obrázok:





Ak máme vrcholy *u*, *v* a hranu *h*, ktorá ich spája, zapisujeme to *h* = *uv* a hovoríme, že hrana *h* je *incidentná* s vrcholmi *u* a *v*. O vrcholoch *u*, *v* hovoríme, že sú *susedné*.
Vrcholovú množinu grafu *G* niekedy označujeme aj *V(G)* a hranovú množinu grafu *G* označujeme *H(G)*.
Ak hrana spája vrchol sám so sebou, *h* = *uu*, nazývame ju *slučka*. Hranu, ktorá nie je slučka, nazývame *linka*. Niekedy môžu byť vrcholy spojené viacerými hranami. Takéto hrany nazývame *násobné*. Graf, ktorý nemá slučky ani násobné hrany nazývame *obyčajný*.

Ak *G* je graf, ktorého každý vrchol má rovnaký stupeň *k*, nazývame ho *pravidelným* stupňa *k*. Ak *K* je obyčajný graf, ktorého každý vrchol je spojený hranou (incidentný) so všetkými ostatnými vrcholmi grafu, nazývame ho *kompletný* a označujeme K_n, kde *n* je počet vrcholov kompletného grafu. Na nasledujúcich obrázkoch sú grafy $K_1, K_2, ..., K_5$.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Obrázok: Niektoré kompletné grafy

Graf *G* nazývame ***orientovaný***, ak všetky hrany *h* z jeho hranovej množiny *H(G)* sú orientované.

Graf *G* nazývame ***neorientovaný***, ak všetky hrany *h* z jeho hranovej množiny *H(G)* sú neorientované.

Graf *G* nazývame ***zmiešaný,*** ak obsahuje orientované aj neorientované hrany.

Graf *G* nazývame ***hranovo ohodnotený***, ak je každej hrane *h* z hranovej množiny *H(G)* grafu *G* priradené reálne číslo x_h.

Na rôzne aplikácie sa používajú rôzne typy grafov. Hrany **orientovaného grafu** majú určenú orientáciu, ktorá sa na obrázkoch väčšinou zobrazuje ako šípka. Niekedy sa v grafoch dovoľujú hrany idúce do vrcholu, v ktorom začali. Niekedy majú hrany grafu priradenú hodnotu (cenu), ktorá označuje napr. dĺžku.

Mnoho praktických problémov možno sformulovať ako problém týkajúci sa určitého grafu. Grafy sa hodia na reprezentáciu rôznych typov sietí, napríklad cestnej siete, počítačovej siete, sústavy vodovodov atď. Algoritmy na riešenie úloh na grafoch sú dôležitou časťou informatiky.

Začiatky teórie grafov môžeme hľadať u **Leonharda Eulera** (1707-1783). V roku 1736 sa zaoberal úlohou prejsť všetkých 7 mostov v Kráľovci (dnešný Kaliningrad) bez toho, aby išiel 1 mostom dvakrát, teda, aby šiel mostom práve raz a vracal sa do začiatočného bodu. Euler túto úlohu previedol na úlohu nakresliť obrázok – graf jedným ťahom a pomocou toho dokázal jej neriešiteľnosť, lebo dokázal, že takáto trasa existuje, iba ak každý vrchol grafu má párny počet hrán (čo nebol prípad Kráľovca). Súčasne dal všeobecný návod, ako riešiť úlohy podobného typu.

V matematike i mimo nej sa často stretávame s objektmi, ktoré sú istým spôsobom pospájané pomocou iných objektov. Napríklad vrcholy mnohostena pospájané hranami, atómy prvkov pospájané väzbami, dopravné uzly pospájané cestami alebo ľudia pospájaní vzájomnými vzťahmi. Tieto príklady nás dovedú i k ďalším definíciám:

Vrcholy 0. stupňa sa nazývajú *izolované*.

Ak majú všetky vrcholy grafu rovnaký stupeň, graf sa nazýva *pravidelným grafom n-tého stupňa*.

Graf sa nazýva *kompletný alebo úplný*, ak neobsahuje slučky a každé dva vrcholy toho grafu sú spojené práve jednou hranou.

Grafy G a G´ sa nazývajú *izomorfné*, ak vrcholy grafu G môžeme bijektívne priradiť vrcholom grafu G´ tak, aby dva prvky grafu G boli incidentné práve vtedy, keď sú incidentné im zodpovedajúce prvky grafu G´. Izomorfné grafy spravidla nepokladáme za rôzne.

Grafy G a G´ sa nazývajú *homeomorfné*, ak sú buď izomorfné, alebo keď voľbou nových vrcholov 2.stupňa nahranách grafoch G a G´ môžeme z nich vytvoriť izomorfné grafy.

Graf je *rovinný*, keď existuje jeho diagram, v ktorom sa nepretínajú nijaké dve úsečky (oblúky).

Sledom z vrcholu u do vrcholu v nazývame konečnú postupnosť [v0,h1,v1,h2,...vn-1,hn,vn], n N, kde v0,..vn sú vrcholy grafu (v0=u,vn=v),h1,...hn sú hrany grafu. Pritom predpokladáme, že každá hrana hi (i=1,..,n) spája vrcholy vi-1 a vi. *Počet hrán v slede sa nazýva dĺžka sledu*. Ak u=v, sled nazývame *uzavretý*, v opačnom prípade *otvorený*.

Ak sa v slede ani jedna hrana neopakuje, sled nazývame ***ťah***.

Ak sa v ňom neopakujú ani vrcholy, nazýva sa ***cesta***.

Komponentom grafu G patriacim k vrcholu v grafe G nazývame súhrn všetkých prvkov grafu G, ktoré patria do niektorej cesty začínajúcej sa vo vrchole v. Každý graf sa skladá z komponentov, graf s jedným komponentom sa nazýva *súvislý*.

Rez grafu sa nazýva množina prvkov súvisleho grafu, po odstránení ktorých sa graf rozpadne na dva komponenty a žiadna podmnožina rezu nemá túto vlastnosť. Odstránenie vrcholu z grafu automaticky odstráni aj hrany s ním incidentné.

Ak je rez vrchol, nazýva sa *artikulácia*, ak je to hrana, nazýva sa *most*.

Kružnica je uzavretý ťah nenulovej dĺžky, v ktorom sa neopakujú vrcholy s výnimkou začiatočného.

Kružnica s n vrcholmi sa nazýva aj *n-uholník*.

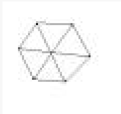
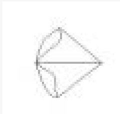
Kružnica obsahujúca všetky vrcholy grafu sa nazýva *hamiltonovská*.

Ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu sa nazýva ***eulerovský***. Uzavretý eulerovský ťah v grafe G existuje práve vtedy, keď G je súvislý a všetky jeho vrcholy sú párneho stupňa. Ak má G práve dva nepárne vrcholy, obsahuje otvorený eulerovský ťah.

Graf neobsahujúci kružnicuje *les*, ak je súvislý – *strom*.

Strom, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu sa nazýva ***kostra grafu.***

Príklady:


Viac o Eulerovi:

LEONHARD EULER

(* **15. 4. 1707**, Bazilej, Švajčiarsko - † **18. 9. 1783**, Petrohrad, Rusko)

Bol švajčiarsky matematik a fyzik. Mnohí ho považujú (spolu s Carlom Friedrichom Gaussom) za najväčšieho matematika všetkých čias.

Leonhard Euler požil pojem funkcie (prvýkrát presne definovaná Leibnizom v 1694) na popísanie výrazu obsahujúceho rôzne parametre (argumenty). Euler bol jeden z prvých, ktorí aplikovali metódy matematickej analýzy vo fyzike.

Narodil sa a chodil do školy vo Švajčiarsku, kde prejavil svoj obrovský matematický talent. Pôsobil ako profesor matematiky v Petrohrade, neskôr v Berlíne, neskôr sa vrátil späť do Petrohradu. Považuje sa za jedného z najplodnejších matematikov všetkých časov. Dominoval matematikom osemnásteho storočia a vyvodil mnoho výsledkov v tom čase novom kalkule matematickej analýzy. Posledných sedemnásť rokov svojho života bol úplne slepý, napriek tomu práve v tomto období spísal skoro polovicu všetkých svojích prác.

Celý svoj život bol Euler veľmi pobožný. Veľmi známy príbeh o tom, ako Euler vyprovokal **Denisa Diderota** na dvore **Kataríny Veľkej** svojím výrokom „Pane, $(a+b)^n/n = x$ teda Boh existuje. Odpovedzte!“, je však pravdepodobne vymyslený.

Objavy:

V matematike Euler prispel svojimi dôležitými objavmi v teórii čísel, ako aj v teórii diferenciálnych rovníc. Na poli matematickej analýzy je badať, ako spojil Leibnizov diferenciálny kalkul s Newtonovou metódou prúdenia. Slávu si na večné časy dobil aj v roku 1735, keď vyriešil dlho otvorený Baselov problém: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

Takisto ukázal, že pre všetky reálne čísla *x* platí: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ Toto je známa *Eulerova formula*, ktorá priraďuju exponenciálnej funkcii ústrednú rolu. Je takisto spoluobjaviteľom ***Eulerovho-Maclaurinovho vzorca***, veľmi užitočného nástroja na výpočet ťažkých integrálov, súm a radov.

V roku 1739 Euler napísal *Tentamen novae theoriae musicae*, čo bol pokus skombinovať matematiku a hudbu. Jeho biograf túto prácu komentuje slovami, že „pre hudobníkov bola príliš ťažká na pochopenie a pre matematikov príliš hudobná“ ☺

V ekonómii ukázal, že keď každému činiteľovi produkcie je zaplatená hodnota jeho druhoradého produktu, potom celkové prijímy a výdavky budú úplne vyčerpané.

V geometrii a algebraickej topológii existuje vzťah nazývaný (ďalšia) ***Eulerova formula***, ktorá dáva do súvislosti počet hrán, vrcholov a stien jednoducho spojeného mnohostena. Ak je daný takýto mnohosten, potom súčet vrcholov a stien je vždy rovný počtu hrán plus dva, teda $S - H + V = 2$ (pri štandardnom označení). Táto veta je tiež aplikovateľná na rovinný graf. Pre nerovinné grafy existuje jej zovšeobecnenie: Za predpokladu, že graf sa dá vložiť do variety *M*, potom $S - H + V = \chi(M)$, kde χ je *Eulerova charakterizácia variety*, konštanta, ktorá je nemenná počas spojitých deformácií. Eulerova charakteristika jednoducho súvislej variety, ako napr. gule alebo roviny, je 2. Existuje aj zovšebecnenie Eulerovej vety pre ľubovoľné rovinné grafy: $S - H + V - K = 1$, kde *K* je počet komponentov grafu.

V roku 1736 Euler vyriešil už vyššie spomínaný problém známy ako sedem mostov mesta Kráľovec (ktorý zverejnil v práci *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*), čím ***založil teóriu grafov*** a ***topológiu.***

Na záver vám ponúkam výrok: *„Študujte Eulera, študujte Eulera. Je to náš majster vo všetkom.“* **Pierre-Simon Laplace** uviedol túto vetu ako odkaz svojím študentom vo svojom testamente. Môj odkaz pre vás ☺: Táto oblasť matematiky je veľmi zaujímavá a oplatí sa jej venovať trochu viacej času v tomto našom uponáhľanom svete.