Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita, Ružomberok

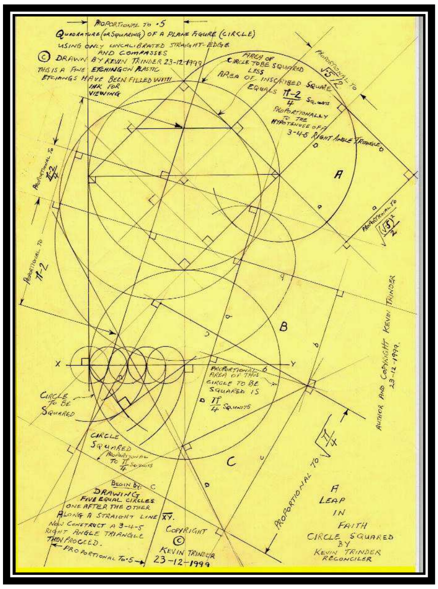
Kvadratúra kruhu

(semestrálna práca)

v Ružomberku, 2006

Meno: Juliána Gordiaková
Kombinácia: matematika-
náb. výchova
Ročník: štvrtý
Šk. rok: 2005/2006

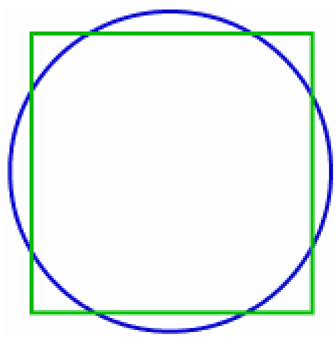
Kvadratúra kruhu



Úvodom:

Úlohou kvadratúry kruhu riešili už predgrécki matematici a našli veľmi presnú konštrukciu.(pomocou pravítka a kompasu) Grékom však nešlo o veľmi presnú, ale o absolútne presnú konštrukciu. Prvé zachované kusé zmienky o riešení problému vedú do 5. storočia pred n. l.

1. Kvadratúra kruhu:

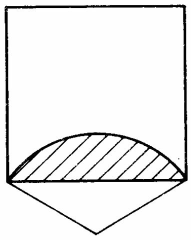


Naša problematika:
„ Tento štvorec a kruh majú rovnaký obsah. “

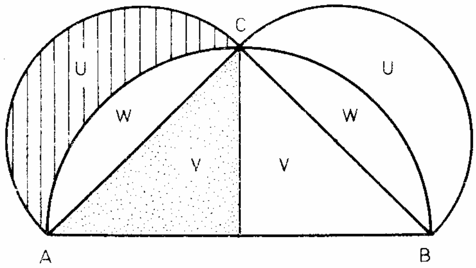
2. Známi ľudia ktorí sa zaoberali týmto problémom:

Anaxagoras z Klazonenai (500- 428), zakladateľ aténskej filozofickej školy, si riešením kvadratúry kruhu krátil dlhú chvíľu vo väzení. Hovoril, že nebeské

telesá nie sú božstvá, ale hmotné predmety. Škoda, že sa nezachovala zmienka o riešení tohto problému.
Antifón z Atén 5. st, pred n. l.), sofista prezývaný Slovovar, ako prvý počítal obsah kruhu tak, že postupne vpisoval do neho väčšie a väčšie n- uholníky. Začal so štvorcom a pokračoval pre n = 8, 16 atď. Veril, že takto uskutoční kružidlom a pravítkom presnú kvadratúru kruhu. Už za svojho života našiel oponentov, že žiaden kruh n- uholník nevyčerpá kruh celkom.
Pytagorovec *Brizon* chcel určiť obsah kruhu ako aritmetický priemer dvoch n-uholníkov, vpísaného a opísaného n- uholníka danému kruhu.
Avšak tieto pokusy zlyhali. Začínala sa vyvíjať skeptická myšlienka, že problém je neriešiteľný, lebo oblinu nemožno nahradiť rovnoplochým mnohouholníkom, a ak, taak iba v triviálnach prípadoch.
Proti tomuto pesimizmu vzkriesil nové duchaplné nápady *Hippokrata z Chia*.
Základom jeho kvadratúr je tvrdenie: Obsahy podobných kruhových odsekov sú v tom istom pomere ako obsahy štvorcov zostrojených nad ich tetivami.

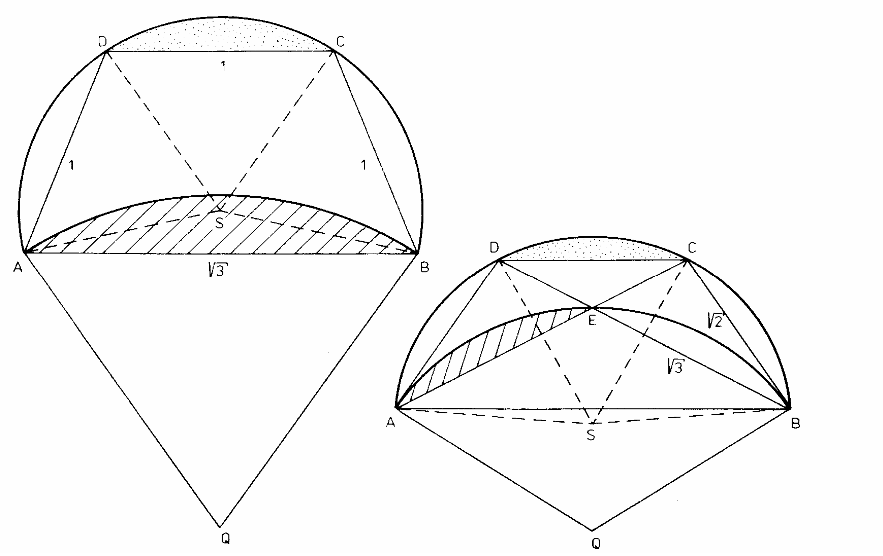


Nevieme však, či uvedené tvrdenie aj skutočne dokázal, alebo ho prijal ako evidentné.
Určite ho dokázal *Eudoxos*, ktorého dôkaz sa zachoval u Euklida. Eudoxovi prisúdili nie jeden dôkaz, ale celú dôkazovú techniku, ktorú nazývame dnes **exhaustačná metóda**. Je založená na idealizácii postupu, ktorý použil Antifón. Hoci pravidelnými n- uholníkmi nemožno nikdy kruh celkom vyčerpať, predsa môžeme uvažovať o ideálnom prípade, keď proces vyčerpávania pôjde tak ďaleko, že prekročí každú vopred stanovenú kladnú hodnotu rozdielu medzi obsahom kruhu a obsahom vpísaného n- uholníka. To umožňuje dokázať uvedené tvrdenie.
Hippokratová úvaha je znázornená na obrázku:



Podľa Pytagorovej vety je obsah štvorca nad preponou AB rovnaký obsah oboch štvorcov nad odvesnami AC a BC. Podľa tvrdenia sa teda aj polkruh nad AB (jeho obsah je 2V + 2W) rovná súčtu polkruhov nad AC a BC (ich obsah je

2W + 2U). Odtiaľ V = U, teda na danom obrázku vybodkovaný trojuholník má ten istý obsah ako šrafovaný mesiačik.
Tak sa mu podarilo abstraktne pretvarovať na trojuholník s rovnakým obsahom. Nádeje, že sa raz podarí vyriešiť úlohu o kvadratúre kruhu, sa obnovili. Hippokratovi sa podarili aj ďalšie úspešné kvadratúry založené na obmenenom použití uvedenej myšlienky.
Príklad:

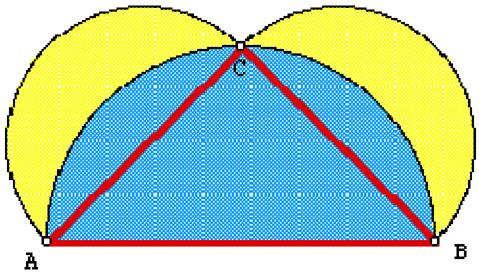


a) **b)**

Nech S je stred kružnice opísanej rovnoramennému lichobežníku ABCD, pre ktorý $|AB| = \sqrt{3}$ a $|BC| = |CD| = |DA| = 1$. Nech ABQ je trojuholník rovnoľahlý s trojuholníkom DCS, pričom stred rovnoľahlosti je priesečník priamok BC a AD. Podľa uvedeného tvrdenia sa šrafovaný odsek nad tetivou AB rovná trojnásobku vybodkovaného odseku nad tetivou CD.
Teda obsah odsekov nad tetivami AD, DC, BC je rovnaký ako obsah útvaru, ktorý je na obrázku a) silne orámovaný.
Tretí prípad kvadratúry mesiačika je znázornený na obrázku b). Silne orámovaný útvar má ten istý obsah ako päťuholník AEBCD. V lichobežníku ABCD s priesečníkom uhlopriečok E platí $|BC| = |CD| = |DA| = \sqrt{2}$ a $|AE| = |BE| = = \sqrt{3}$. Bod S je stred kružnice opísanej lichobežníku ABCD, bod Q je stred kružnice opísanej trojuholníku ABE. Trojuholník DSC a AQE sú podobné. Podľa uvedeného tvrdenia sa obsah šrafovaného odseku rovná 3/2 vybodkovaného odseku. Preto má zjednotenie odsekov nad tetivami AE, EB ten istý obsah ako zjednotenie odsek nad tetivami AD, DC a CB. Tým je tvrdenie dokázané. Na jeho počesť svojho objaviteľa sa silne orámované útvary na obrázkoch sa volajú Hippokratové mesiačiky.

Skúmanie kvadratúry kruhu
Jennifer Roth

Je možné skonštruovať štvorec, ktorého obsah bude rovnaký s obsahom vpísaného kruhu?
Odpoveď na túto otázku bola skúmaná mnohými matematikmi a bolo objavené, že s kompasom a pravítkom je skonštruovanie nemožné. Hippokrates zistil, že tu sú určité časti so zaoblenými hranami, ktoré sú štvorcové nazývané **lunes (mesiačiky).**
Konštrukcia je podobná s jeho pre jeden obsah mesiačika.
Začína sa s rovnoramenným pravouhlým trojuholníkom a potom polkruhy sú konštruované na troch stranách ako je ukázané na nasledujúcom obrázku.



Považované percento obsahu polkruhu na AB a AC. Dostaneme:

$$\frac{\text{Obsah polkruhu nad AB}}{\text{Obsah polkruhu nad AC}} = \frac{\dfrac{\pi\,(AB)^2}{2}}{\dfrac{\pi\,(AC)^2}{2}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Teraz od ABC je rovnoramenný trojuholník s AB preponou.

$$AB = \sqrt{2} \cdot AC$$

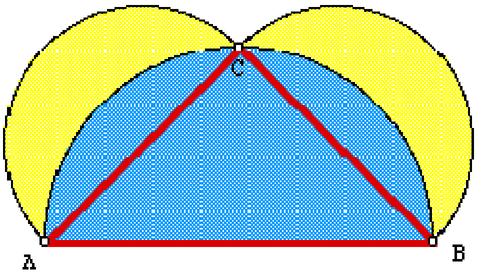
Preto

$$\frac{\text{Obsah polkruhu nad AB}}{\text{Obsah polkruhu nad AC}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{(\sqrt{2} \cdot AC)^2}{AC^2} = \frac{2 \cdot (AC)^2}{AC^2} = 2$$

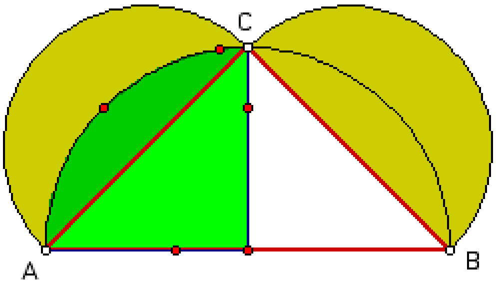
Tak obsah polkruhu nad AB má dvojnásobný obsah polkruhu nad AC. Jeden príklad z nasledujúceho:

Obsah polkruhu nad AC = 1,43 cm^2
Obsah polkruhu nad BC = 1,43 cm^2
Obsah polkruhu nad AB = 2,85 cm^2

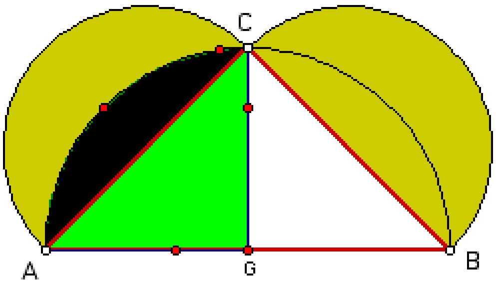
$$\frac{\text{Obsah polkruhu nad AB}}{\text{Obsah polkruhu nad AC}} = 2{,}00\ \text{cm}^2$$



Preto obsah štvrtiny kruhu z AB je ten istý obsah ako polkruh nad AC.



Teraz , ak obsah časti štvrtiny kruhu je počiatočná obsahu štvrtiny kruhu nad AB a polkruhu nad AC.

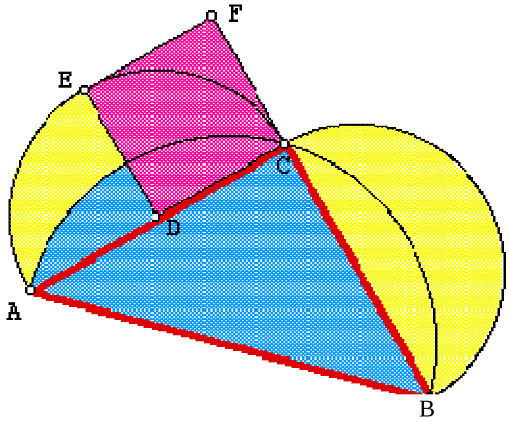


Preto obsah mesiačika nad AC a obsah trojuholníka AGC sú rovnaké. Tak AGC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník, ktorého obsah je:

$$S\,(\,AGC\,) = \frac{1}{4}\,AC^2$$

Tak obsah mesiačika je rovnaký ako štvrtina dĺžky strany 1/ 2 AC.

Vysvetlenie:



Obsah trojuholníka ACB = 2,07 cm^2
(Obsah polkruhu nad AB) – (Obsah trojuholníka ACB) = 1,18 cm^2
Obsah polkruhu nad AC = 1,63 cm^2

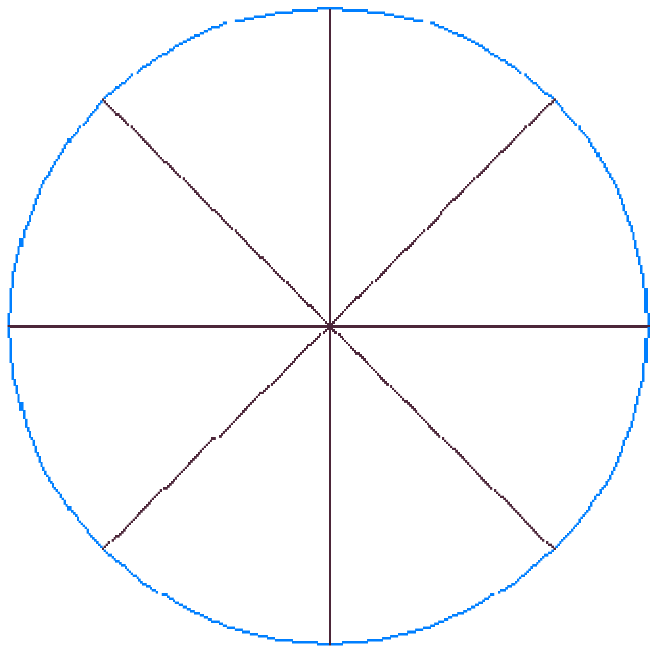
$\dfrac{\text{(Obsah polkruhu nad AB) – (Obsah trojuholníka ABC)}}{2} = 0{,}59\ cm^2$

(Obsah polkruhu nad AC) - ($\dfrac{\text{(Obsah polkruhu nad AB) - (Obsah trojuholníka ACB)}}{2}$) = 1,04 cm^2

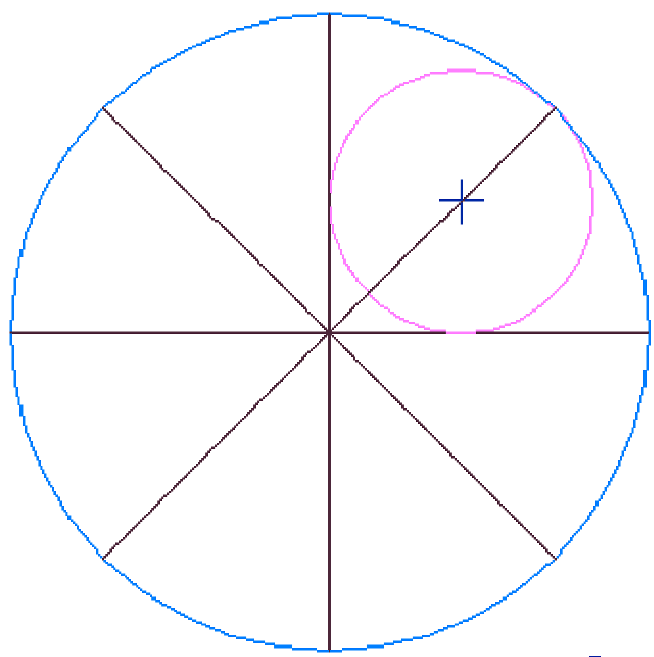
Obsah DEFC = 1,04 cm^2

Konštrukcia kvadratúry kruhu od *Nguyên Tân Tài*

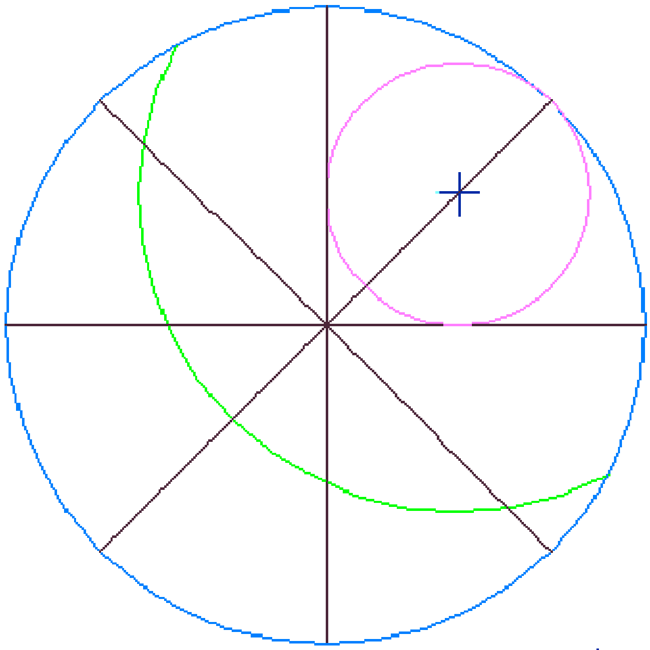
1. Narysujeme si kruh
2. Daný kruh rozdelíme na osem rovnakých častí (45º)



3. Do jedného z kvadrantov vpíšeme menší kruh, ktorý sa dotýka strán v troch bodoch.

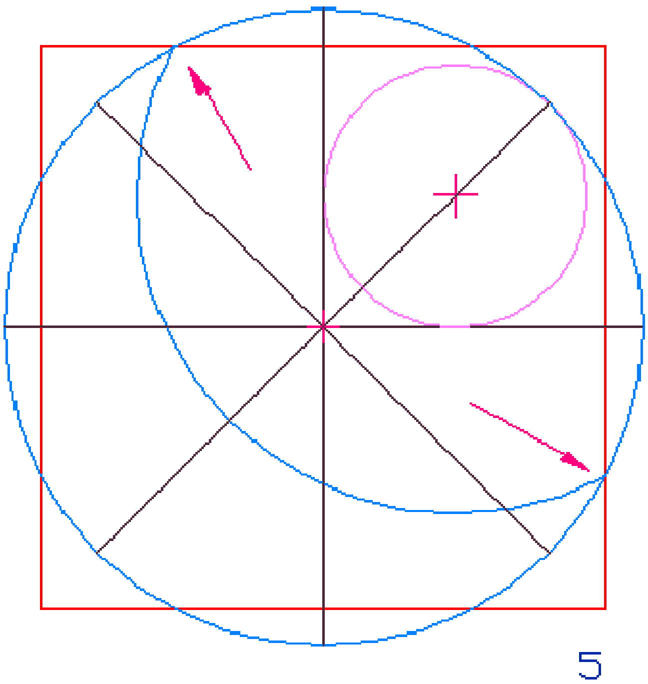


3. Urobíme kružnicu o polomere hlavného kruhu zo stredu malej kružnice. Tá nám pretne hlavný kruh v dvoch boboch.



4

5. Týmito bodmi z kroku 2 vedieme rovnobežky s hlavnými osami hlavného kruhu.



5

6. Riešenie: hľadaný štvorec, ktorý má rovnaký obsah ako kruh.