Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Analytická geometria

(seminárna práca)

Michaela Fedorová
Mat-geo

ak.rok: 2008/2009
1.roč.Mgr.

Ružomberok
2008

ANALYTICKÁ GEOMETRIA

Vývoj analytickej geometrie

Existujú dva základné spôsoby štúdia geometrických objektov:

1. syntetická metóda, ktorú objavil Euklides asi 300 r. p.n.l.
2. analytická metóda, ktorú objavil Descartes v 17. st. zavedením súradnicového systému.

Je však nutné rozlíšiť geometriu, ktorá používa súradnice a geometriu analytickú. S počiatkom používania súradnic se môžme stretnúť už v gréckej matematike a to konkrétne u **Apollonia z Pergy** v spojení s kuželosečkami. **Apollonius z Pergy** bol straogréckym matematikom, ktorý spolu s Euklidom a Archimedom tvorili v Zlatom veku gréckej matematiky. Apolónius ako prvý skúmal kužeľosečky: elipsu, parabolu, hyperbolu a ich vlastnosti, ako rezy kužeľa. V slovnej podobe formuloval rovnicu paraboly. Hypotetizoval o epicyklickom pohybe planét.

Používanie súradníc bolo zistené aj za čias **Hipparchosa**, najväčšieho starogréckeho astronóma v spojení s jeho aplikáciami astronomických poznatkov v geografii pomocou akéhosi zavedenia zemepisnej šiřky a dĺžky.

Analytická geometria sa objavuje v okamžiku, kedy bola vytvorená matematická symbolika a dostatočne vyspelá algebra.

Za predchodcu je považovaný **Nicole d'Oresme** (1323 -- 1382), ktorý vyjadril geometricky rýchlosť v závislosti na čase, ale nemôžme však povedať žeby používal súradnice. **Victor J. Katz** vo svojej práci *A history of mathem* že mu môžme prísúdiť iba myšlienku: znázorniť ekvivalentné intenzity ekvivalentnými úsečkami, dvojnásobnú intenzitu potom dvojnásobne dlhou úsečkou.

Za počiatok analytickej geometrie sú však považovaní matematici, ktorých diela vyšli o 200 rokov neskôr.

René Descartes (1594 - 1650) roku 1637 vydal *Discours de la méthode(Rozprava o metóde*), ktorá obsahuje okrem všeobecnej filozofickej časti aj tri dodatky, Dioptriku, Geometriu a Meteory. Dodatok Geometria obsahoval aj prvý publikovaný výklad analytickej geometrie. Používala sa tu akási algebraická symbolika v podobe, aká sa používa dodnes. Nezávisle a v ucelenejšej forme sa k nej dopracoval **Pierre de Fermat**.

Karteziánska sústava bola pomenovaná podľa Descartovho latinského mena Cartesius. Mala by sa volať podľa Fermata. Roku 1629 napísal prácu: ,, Úvod do štúdia rovinných a priestorových kriviek,, v ktorej skôr ako Descartes vybudoval analytickú geometriu v rovine. To, že Descartova **Geometria** zatienila dielo Fermata spôsobilo, že Fermat nepublikoval vôbec svoje výsledky. Oznamoval ich len v listoch svojim známym. Druhou príčinou prijatia Descartovej a nie Fermatovej práce bola vhodná symbolika zavedená Descartom, ktorá sa používa dodnes.

Čo je analytická geometria?

Analytická geometria je geometria, ktorá skúma geometrické objekty algebraickými a analytickými metódami. Vyjadruje ich číslami a rovnicami prostredníctvom sústavy súradníc. Analytická geometria je odvetvie matematiky, v ktorom sú geometrické útvary vyjadrené pomocou čísel; analytická geometria predstavuje prevedenie geometrických úloh na úlohy algebraické.

vzťah medzi príslušným geometrickým útvarom a jeho rovnicou je daný nasledovným pravidlom:

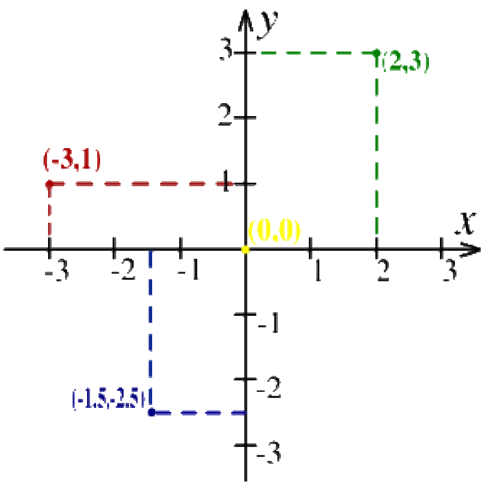
(P) Ľubovoľný bod X leží v danom útvare práve vtedy, ak jeho súradnice spĺňajú rovnicu útvaru.

Na základe tohoto pravidla prienikom útvarov U1 aU2 je množina všetkých bodov, ktorých súradnice spĺňajú súčasne rovnice obidvoch týchto útvarov.

Karteziánska (pravouhlá, pravotočivá) sústava

V rovine E2 zvolíme dve navzájom kolmé priamky(osi) x, y a ich priesečník označíme O. Bod O označíme ako začiatok karteziánskej sústavy súradníc. Pozície ostatných objektov sú teda určené na základe ich vzdialeností od tohto bodu na jednotlivých priamkach (osiach).

V E3 sú dané tri navzájom kolmé priamky x, y, z.



Bod M so súradnicami x_M, y_M. Je to jednoznačné priradenie bodov roviny E2na usporiadané dvojice reálnych čísel, zapisujeme : M[x_M, y_M]. V E3 je daný bod M so súradnicami x_M, y_M, z_M, označujeme ho ako: M[x_M, y_M, z_M].

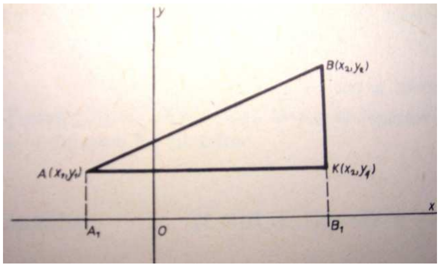
Veta: Dĺžka úsečky A[x_1,y_1] B[x_2,y_2] sa rovná druhej odmocnine zo súčtu štvorca rozdielu koncových prvých súradníc a štvorca rozdielu druhých súradníc jej koncových bodov.

$|AB| = \sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]}$

Dôkaz: Označme K(x_2, y_1) pomocný bod. Nech $x_1 \neq y_1$ a $x_2 \neq y_2$. Potom body A, B, K tvoria tojuholník a zrejme $AB \perp BK$. Ďalej $|AK| = |x_2-x_1|$ a $|BK| = |y_2-y_1|$. Podľa Pytagorovej vety:

$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2 =$

$= |x_2-x_1|^2 + |y_2-y_1|^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$



Zdroj: Hejný, M.:*Od pravouhlých súradníc k vektorom*

Veta2: Pre súradnice x,y stredu úsečky A[x_1,y_1] B[x_2,y_2] platí: $x= (x_1+x_2)/2$ $y= (y_1+y_2)/2$

Príklad: Nájdite stred úsečky A(1,2) B(0,3). S(x,y)=?

$|AS| = |BS| = 1/2 |AB|$

$x= (1+0)/2$ $y= (2+3)/2 \Leftrightarrow x= ½$ $y= 5/2$

súradnice stredu S (1/2,5/2)

Poznáme už analytické vyjadrenie bodu: jeto usporiadaná dvojica reálnych čísel. Teraz ukážeme,že analytickým vyjadrením priamky je lineárna rovnica.

Rovnica priamky parametrická: $x= a_1+ ks_1$ $y= a_2+ks_2$, k patrí R

v E3: $x= a_1+ ks_1$ $y= a_2+ks_2$ $z= a_3+ks_3$, k patrí R

s je smerový vektor priamky: **s**= B-A

Rovnica priamky všeobecná: $ax+by+c=0$ $a,b \neq 0$

Vektor **n**= [a,b] sa nazýva normálový vektor priamky a je kolmýá na smerový vektor priamky **s.** **n*s**=0

Smernicový tvar rovnice priamky: y= kx+q, číslo k sa nnazýva smernica priamky.k=tg α, kde α je uhol, ktorý zviera priamka s kladnou polosou x.

Rovina:

- parametrická rovnica:

  $x = X_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1$

  $y = Y_1 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2$

  $z = Z_1 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3$

  kde $A = [X_1, Y_1, Z_1]$ je bod roviny a **u**,**v** sú nekolineárne vektory vychadzajúce z bodu *A*.

- všeobecná rovnica roviny:

  $ax + by + cz + d = 0$

  získame ju:

  1) pomocou dvoch vektorov prislúchajúcich rovine – cez normálový vektor

  $$\vec{\mathbf{n}} = (a,b,c) = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \text{ – normálový vektor}$$

  2) z parametrickej rovnice – vylúčením *t, s*
  3) pomocou 3 bodov náležejících do roviny – dosadením bodov za *x, y, z* a dopočítaním *a, b, c, d,* pričom za jednu neznámu volíme

  zvláštne prípady rovnice:

  $\rho \| O_x \Rightarrow a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

  $\rho \| O_y \Rightarrow a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$

  $\rho \| O_z \Rightarrow a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$

  $\rho \| O_x \wedge \rho \| O_y \Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$

1 POLOHOVÉ A METRICKÉ VZŤAHY ÚTVAROV V ROVINE

Vzájomná poloha dvoch priamok:

rovnobežné

- rôzné – žiadny spoločný bod
- totožné – nekonečne veľa spoločných bodov

rôznobežné – jeden spoločný bod

Odchýlka dvoch priamok: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}|}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|} = \dfrac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2} \cdot \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2}}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Vzdialenosť bodu od priamky: $|Ap| = \dfrac{|aX_0 + bY_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad A = [X_0, Y_0]$

2 POLOHOVÉ A METRICKÉ VLASTNOSTI ÚTVAROV V PRIESTORE

Vzájomná poloha dvoch priamok:

rovnoběžné

rôzne – žiadny spoločný bod

totožné – nekonečne veľa spoločných bodov

rôznobežné – jeden společný bod

mimobežné – žiadny spoločný bod, neležia v jednej rovine

Vzájomná poloha dvoch rovin:

rovnoběžné

rôzne – žiadny spoločný bod

totožné – nekonečne veľa spoločných bodov

rôznobežné – jedna spoločná priamka – priesečnica

Príklad: $\rho: 2x - y - z - 1 = 0$

$\sigma: x + y + 2z - 3 = 0$

p: $3x + z - 4 = 0$

$x = t$ Jednu neznámu nahradíme parametrom

$z = 4 - 3x = 4 - 3t$

$y = 3 - x - 2z = -5 + 5t$

Odchýlka dvoch priamok: rovnako ako v rovine

Odchýlka priamky od roviny: $\sin\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{s_p}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_\rho}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{s_p}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{n}_\rho}\right|}$

Odchýlka dvoch rovin: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}_\rho} \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}_\tau}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathbf{n}_\rho}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathbf{n}_\tau}\right|}$

Vzdialenosť bodu a roviny: $v = \dfrac{\left|aX_0 + bY_0 + cZ_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ $A = [X_0, Y_0, Z_0]$

Vzdialenosť bodu od priamky: vytvoríme rovinu kolmú na priamku tak, aby prechádzala bodom A a vypočítame vzdialenosť medzi A a priesečníkom priamky a roviny.

$\overrightarrow{\mathbf{s}_p} = \overrightarrow{\mathbf{n}_\rho}$, $v = \left|A \quad \rho \cap p\right|$

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok: $v(p,q) = v(A,q)$; $A \in p$

Vzdialenosť priamky od roviny s ňou rovnobežnou: $v(p,\rho) = v(A,\rho)$; $A \in p$

Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovin: $v(\rho,\tau) = v(A,\tau)$; $A \in \rho$

<u>Príklady:</u>

<u>Určte spoločné body priamok p, q</u>

p: x-y+1=0 **q**: -2x+y-1=0

x-y+1=0 -2(y-1)+y-1=0

x=y-1 y=1

x=0

Spoločný bod daných priamok [0;1].

<u>Nájdite priesečník priamky p s rovinou q :</u>

p: $x = -2+t$ **q**: $x+y-z+2 = 0$

$y = 2+2t$

$z = -2+2t$

$x+y-z+2 = 0$

$-2+t+2+2t+2-2t+2 = 0$

$t = -4$ $x = -2-4 = -6$

$y = 2-8 = -6$

$z = -2-8 = -10$

Priesečník danej priamky s rovinou je v bode [-6 ; -6 ; -10].

Použitá literatúra:

http://www.math.muni.cz/~mlc/vyuka/M3521/uvod.html

http://www.era.topindex.sk/index.php?id=20

http://www.pulib.sk/elpub/FHPV/Strecko1/pdf_doc/8.pdf

http://www.math.sk/skripta/node19.html

http://www.referaty.cz/download.aspx?katId=5

Folta,J.: *Dejiny prírodných vied v dátach*, Smena, Bratislava, 1981, 376s.

Hejný, M.:*Od pravouhlých súradníc k vektorom*, Slovesnké pedagogické nakladateľstvo, Bratislava,1980,215s.