Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita, Ružomberok

Neeuklidovská geometria

Seminárna práca

História matematiky

Katarína Dovcová

Biológia – matematika

1.Mgr

2008/2009

Cieľom mojej práce je priblížiť čitateľom problematiku neeuklidovskej geometrie a poukázať na jednoduchosť a zrozumiteľnosť na prvý pohľad nepochopiteľných problémov.

História

Z histórie vieme, že prvá systematická práca o geometrii bolo viaczväzkové dielo „Základy" od Euklida. Ale už aj v staroveku sa našli ľudia, ktorí zapochybovali o axióme rovnobežnosti, ktorá mala zložitú formuláciu a vzbudzovala nedôveru.

Jeden z mnohých, ktorý zapochyboval bol Proklos (410 - 485). Ďalší, kto prispel k poznaniu neeuklidovskej geometrie bol Gauss (1777 - 1835). Chápal podstatu a vyjadroval sa zasvätene k neeuklidovským výsledkom, ale nevytvoril ucelený logický systém neeuklidovskej geometrie. Vedel o geometrii, kde je možné zostrojiť trojuholník s ľubovoľne malými uhlami a poznal, že v takejto geometrii neexistujú podobné útvary.

V roku 1826 predložil matematickému oddeleniu svoju prácu o neeuklidovskej geometrii Lobačevský (1792 - 1856). Práca mala názov „Krátke pojednanie i základoch geometrie s presným dôkazom teórie rovnobežných priamok". Lenže toto dielo nebolo pochopené s vtedajšími matematikmi. Ale význam jeho práce bol ocenený až niekoľko desiatok rokov po jeho smrti, keď Albert Einstein použil zovšeobecnenie Lobačevského myšlienok k formulácii svojej všeobecnej teórie relativity.

Nezávisle od Lobačevského objavil a prepracoval neeuklidovskú geometriu aj Janos Bolyai. Od neho pochádza množstvo konštrukcií, ako napríklad konštrukcia úsečky príslušnej uhlu súbežnosti, kvadratúra kruhu a iné. Bolyai ťažko znášal stratu prvenstva v objavení neeuklidovskej geometrie, prvenstvo uznal Lobačovskému. On sám už nepublikoval žiadne dielo z matematiky.

V neeuklidovskej geometrii prišla ešte jedna významná revolúcia, ktorú spôsobil Bernhard Riemann. Pokračoval tam, kde Gauss, Lobačevský a Bolyai položili základy. Svoje myšlienky dal na verejnosť v roku 1854. Do vtedy, kým nezverejnil svoj pohľad na neeuklidovskú geometriu sa táto geometria zaoberala len zakrivenou dvojrozmernou plochou. Riemann ale ukázal, že rovnakým spôsobom sa dajú študovať aj zakrivené priestory, ktoré majú rôzny počet rozmerov. Môže to byť trojrozmerný priestor ako je náš vesmír, ale tak isto to môže byť priestor, ktorý má štyri, päť, šesť, alebo aj viac rozmerov. V Riemannovej geometrii mohol byť priestor rôzne skrútený, zdeformovaný, mohol mať rôznu krivosť v rôznych bodoch, mohol byť súvislý ale aj dierovaný, mohol mať ľubovoľný počet rozmerov.

Stavba neeuklidovskej geometrie bola ukončená až Kleinom (1849 - 1925).

Neeuklidovská geometria je geometria, ktorá spĺňa prvé štyri Euklidove axiómy, ale nespĺňa už piatu axiómu. Geometria, ktorá spĺňa aj piatu axiómu sa nazýva Euklidovská. Neeuklidovská geometria sa skladá sa z viacerých geometrií, ako napríklad Hyperbolická geometria, ktorú objavil Lobačevský, Riemannova geometria, absolútna geometria a eliptická geometria. Sférická geometria je zvláštny prípad eliptickej geometrie. Je to geometria zobrazovania na guľovú plochu.

Hlavným rozdielom neeuklidovskej a euklidovskej geometrie je povaha rovnobežiek. Ako Euklides tvrdí v piatej axióme, že pre každú priamku p a bod A, ktorý neleží na priamke p, existuje práve jedna priamka prechádzajúca bodom A, ktorá nepretína priamku P. Ale v hyperbolickej geometrii existuje nekonečne veľa priamok prechádzajúcich bodom A a nepretínajú priamku a v eliptickej geometrii sa naopak akákoľvek dvojica priamok vzájomne pretína.

Ďalší možný spôsob popisu odlišnosti v týchto geometriách je nasledujúci. Dve priamky v dvojrozmernej rovine, ktoré sú kolmá na tretiu priamku, majú v Euklidovskej geometrii rovnakú vzdialenosť a označujeme ich ako rovnobežky. V hyperbolickej geometrii sú „zakrivené od seba“ a smerom od spoločnej kolmice ich vzájomná vzdialenosť rastie. V eliptickej geometrii sú tieto dve priamky „ zakrivené k sebe“ až nastane prípad že sa tieto dve priamky pretnú. Z tohto dôvodu neexistujú v eliptickej geometrii rovnobežky.

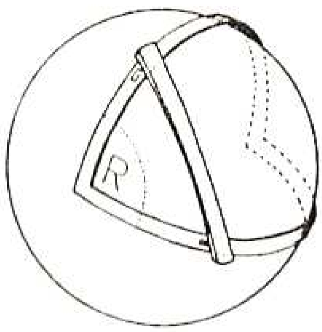
Sférická geometria

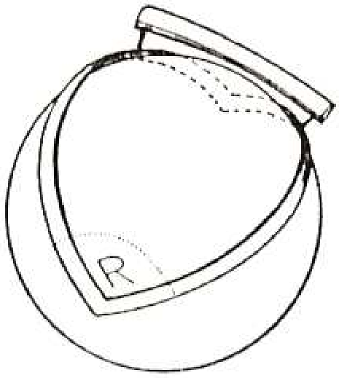
Táto geometria je geometria zobrazovania na guľovú plochu.

D: Guľou sa rozumie jednotková guľa. Čo znamená, že to je guľa, ktorá má polomer 1. Jej povrch sa nazýva guľová plocha.

Priamka v euklidovskom mieste nie je taká istá priamka na guľovom povrchu. Na guli musí každá línia, patriaca jej povrchu byť z pohľadu tretieho rozmeru zakrivenou líniou. Ak by sme chceli línie navzájom rovnobežné a rovnako vzdialené, tak by to boli všetky sústredené kruhy ako pomyslené rovnobežky na glóbuse. Vzdialenosť je ale definovaná ako najkratšia spojnica dvoch bodov. A najkratšia spojnica dvoch bodov je predsa priamka, ale na guľovej ploche sú len krivky. Ale ak sa na rovnobežky pozrieme ako na dve línie kolmé na priamku v určitej vzdialenosti, dostaneme sa do sporu s piatou axiómou. Ak si za priamku zvolíme rovník a budeme naň viesť dve kolmice, zistíme že sa pretínajú v dvoch bodoch. Tieto body sú od seba vzdialené konečne a sú to póly.

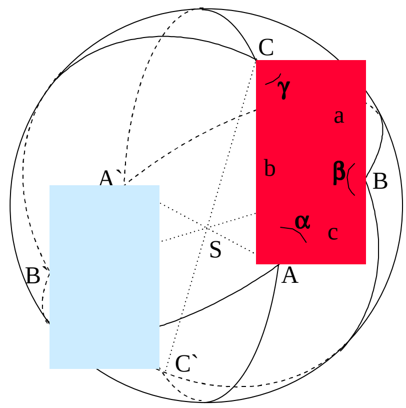
D: Na povrchu sa teda nachádzajú línie, ktoré zodpovedajú priamkam v rovine. Nazývajú sa hlavné kružnice. Hlavnou kružnicou rozumieme krivku, na jednotkovej guli, ktorá vznikne ako prienik guľovej plochy a roviny prechádzajúcej stredom gule.
Na rysovanie na guľovú plochu sa využíva guľové pravítko, ktoré e tvorené latkami, ktoré tvoria sférický trojuholník.





Sférická trigonometria

Pomocou trojuholníka ukážem, že niektoré vety z euklidovskej geometrie platia aj tu, ale nie všetky.



D: Sférický trojuholník, je základný pojem, ktorý budeme využívať. Je to množina všetkých bodov, ktoré ležia na guľovej ploche a na ľubovoľnej priamke SX, ktorá prechádza vnútrom štvorstena ABCS. Časti hlavných kružníc: a, b, c nazývame strany sférického ABC: Pritom a je oblúk BC, b je oblúk AC a c je oblúk AB: Súčasne označujú aj veľkosť týchto oblúkov.
Danými tromi rôznymi hlavnými kružnicami je na guľovej ploche určených 8 sférických trojuholníkov.

Trojuholníková nerovnosť

Pre ľubovoľný sférický trojuholník platí:

$a < b + c$

$b < a + c$

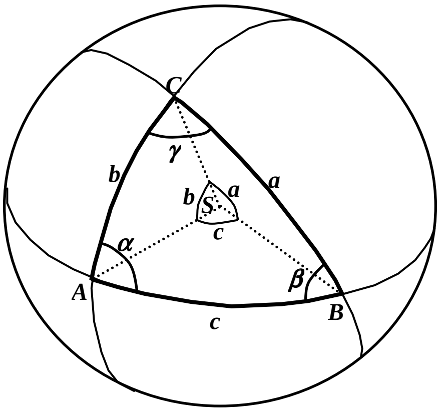
$c < a + b$

Veta o stranách sférického trojuholníka

Pre ľubovoľný sférický trojuholník ABC platí:

$0 < a + b + c < 2\pi$

Označenie uhlov v sférickom trojuholníku



Na rozdiel od rovinného trojuholníka sú dokonca aj *strany* sférického trojuholníka vlastne *uhly*. Sférický trojuholník je teda popísaný šiestimi uhlami, ktorých hodnoty sa udávajú v radiánoch alebo v stupňoch.

Uvažujeme sférický trojuholník ABC, so stranami a, b, c a uhlami α, β, γ pri vrcholoch.

Geometrický význam a, b, c je takýto:

a je uhol medzi úsečkami SC a SB,

b je uhol medzi úsečkami SA a SC,

c je uhol medzi úsečkami SA a SB.

Geometrický význam uhlov α, β, γ je takýto:

α je uhol medzi rovinami SAC a SAB,

β je uhol medzi rovinami SAB a SBC,

γ je uhol medzi rovinami SAC a SBC.

D: Hovoríme, že sférický trojuholník $A_1B_1C_1$ je rohový k sférickému trojuholníku ABC, ak

$SC_1 \perp ASB$

$SB_1 \perp ASC$

$SA_1 \perp BSC$

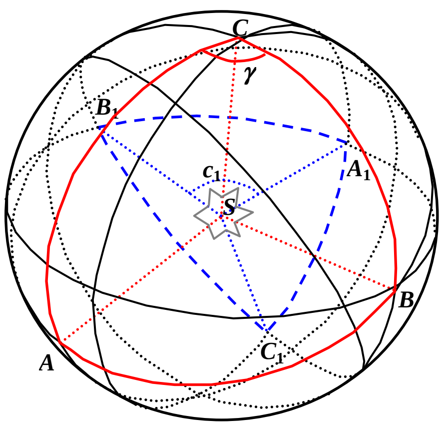
a navyše

bod C_1 leží na opačnej strane roviny ASB ako bod C,

bod B_1 leží na opačnej strane roviny ASC ako bod B,

bod A_1 leží na opačnej strane roviny BSC ako bod A.

Vzťah medzi trojuholníkom a jeho rohovým trojuholníkom



Nech sférický trojuholník $A_1B_1C_1$ je rohový k sférickému trojuholníku ABC a nech a_1, b_1, c_1 sú jeho strany a α_1, β_1, γ_1 sú jeho uhly pri vrcholoch.

Potom platí

$$a_1 + \alpha = b_1 + \beta = c_1 + \gamma = \pi$$

$$a + \alpha_1 = b + \beta_1 = c + \gamma_1 = \pi$$

Poznámka:

Dá sa ukázať, že ak sférický trojuholník $A_1B_1C_1$ je rohový k sférickému trojuholníku ABC, tak potom je aj sférický trojuholník ABC rohový k sférickému trojuholníku $A_1B_1C_1$. Teda trojuholníky ABC a $A_1B_1C_1$ sú navzájom rohové. Nebudeme to tu dokazovať, lebo tento fakt aj tak nebudeme v ďalšom potrebovať.

Veta 4: ***O súčte uhlov v sférickom trojuholníku***

Pre súčet uhlov α, β, γ pri vrcholoch ľubovoľného sférického trojuholníka ABC platí:

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi ,$$

alebo v stupňoch:

$$180 < \alpha + \beta + \gamma < 540°$$