Katolícka univerzita v Ružomberku

Pedagogická fakulta

Ptolemaiova veta

Miroslav Chytra

História matematiky

RNDr. Štefan Tkačik, PhD

2006

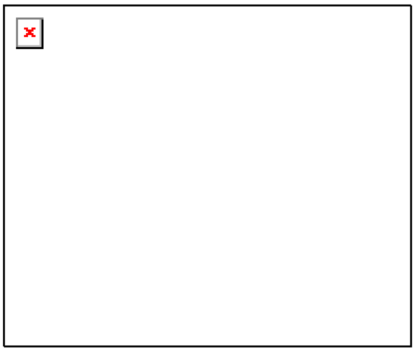
Ptolemaiova veta

Klaudius Ptolemaios (85-168) - grécky astronóm, geograf a optik, žil v Alexandrii. Koncom roku 150 n. l. spísal jeho najväčšie dielo *Matematická zbierka v 13 knihách* známe tiež pod poarabšteným názvom *Almagest.* Je v ňom vyložená Ptolemaiova geocentrická sústava a tiež sústavný výklad trigonometrie tetív. Ptolemaios delí kruh na 360 dielov a jeho priemer na 120 zhodných dielov a ich zlomky vyjadruje v šesťdesiatkovej sústave. 1 diel = 1/120 priemeru, tetiva 90 = 80 51´10´´, 120 = 103 55´23´´. Tetivu nazýva chordou; našiel vzťah $(chrd\alpha)^2 + (chrd180-\alpha)^2 = priemer^2$, čo zodpovedá dnešnému vzťahu $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.Dokázal tiež vetu ekvivalentnú vzorcu $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. Zostavil tabuľky tetív s intervalom ½. V súvislosti s ich prípravou získal pravidlo odpovedajúce dnešnému vzorcu $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ a pre interpoláciu odvodil vetu podobnú vzťahu $\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}$, ak $\frac{p}{2} > a > b$. S týmito znalosťami zostavil tabuľku tetív odpovedajúcich uhlom od ½ do 180 s polstupňovými intervalmi, čo zodpovedá tabuľke sinusov od ¼ do 90. Našiel tiež hodnotu p = 3 + 8/60+ 3/3600 = 3,14166 a pre $\sqrt{3}$ = 1 + 43/60 + 55/60^2 + 23/60^3 = =1,7320509.

Údaje Ptolemaiových tabuliek boli presné na päť desatinných miest a slúžili niekoľko storočí pre riešenie trojuholníkov. Odvodil aj množstvo viet sférickej trigonometrie. Popri *Almageste* sa zachovali ešte dva Ptolemaiove diela, kde je široko využívaná matematika: *Náčrtok (Analemna)* a *Planisférium.* V *Náčrtku* je teória pravouhlej projekcie nebeskej sféry na tri navzájom kolmé roviny: rovinu poludníku, horizontu a prvej vertikálnej kružnice. V *Planisfériu* vykladá stereografickú projekciu nebeskej sféry, tj. priemet severnej hemisféry na rovinu rovníka, stredom projekcie je južný pól. Ptolemaios tiež napísal niekoľko prác astronomických pojednaní o optike, kde je vyložená teória zrkadiel a teória lomu svetla. Ďalej práce z oblasti mechaniky, v ktorej je popísaný jeho vynález – nerovnoramenné váhy – rameno so škálou a pohyblivým bežcom ako závažím. V práci *Geographia* stanovil Ptolemaios zemepisnú šírku a dĺžku 8000 bodov na zemskom povrchu a využitím kartografickej projekcie. V tejto práci je obsiahnutá aj myšlienka súradníc.

Popri základných hodnotách dĺžok tetív, ktoré uviedol v tabuľkách v diele *Almagest*, a ktoré zodpovedali obvodovým uhlom veľkosti 30°, 45°, 60°, 75°,... a ktoré stanovil pomocou Pythagorovej vety z pravidelných vpísaných *n*-uholníkov, uviedol aj ďalšie hodnoty k výpočtu ktorých používal tvrdenie známe dnes ako **Ptolemaiova veta**:

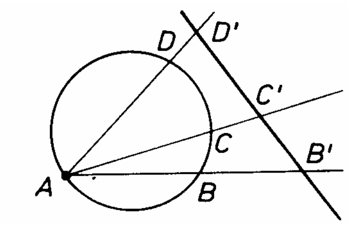
Nech sú v euklidovskej rovine dané body A, B, C, D, ktoré sú navzájom rôzne a neležia na jednej priamke. Potom platí: $|AC|.|BD| \le |AB|.|CD| + |AD|.|BC|$ (obr. 1).



obr. 1

V špeciálnom prípade, keď AD je priemerom kruhu sa stane veta pre tetivy ekvivalentná dnešnému vzťahu $\sin(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Dôkaz: Body A, B, D alebo C, B, D neležia na priamke. Nech sú to body A, B, D. Inverzia so stredom v bode A a koeficientom 1 zobrazí body B, C, D na body B´, C´, D´, pre ktoré platí trojuholníková nerovnosť: $|B`C`| + |C`D`| \geq |B`D`|$, v ktorej platí rovnosť práve vtedy, keď je bod C´ na vzore priamky B´D´ v uvažovanej kruhovej inverzii (tým je kružnica opísaná trojuholníku ABD) a dvojica A, C a B, D sa na tejto kružnici oddeľuje (obr.2). Ak dosadíme do trojuholníkovej nerovnosti pre body B´, C´, D´ podľa vzorca $|X`Y`| = \frac{|x|}{|XS|.|YS|}.|XY|$, kde *S* je stredom kruhovej inverzie a *x* je koeficientom, dostaneme práve dokazovanú nerovnosť.



obr. 2

Ptolemaiova veta sa dá okrem výpočtu dĺžok tetív, ktoré zodpovedajú obvodovým uhlom, použiť aj pri riešení zaujímavých úloh [7], či ako kritérium pri dokazovaní tetivového štvoruholníka [5].

Použitá literatúra:

[1] Struik, D. J.: *Dejiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.
[2] Znám, Š. a kol.: *Pohľad do dejín matematiky*, Alfa, Bratislava, 1986.
[3] Sekanina, M a kol.: Geometria II, SPN, Praha, 1986.
[4] http://mff.cuni.cz/commentary/C/serie/3/uvod3.pdf
[5] http://mat.fsv.cvut.cz/gcg/sbornik/leischner.pdf
[6] http://www.pef.zcu.cz/pef/kmt/subjects/dejiny_m/w_rim.htm
[7] http://www.kms.sk/vzoraky.php?&s=1&t=let&r=2003