Katolícka Univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta

LOGIKA

šk.r.:2006/2007
4. ročník

Patrícia Bučková
matematika-informatika

Výrok,

- Je gramatická veta (oznamovacia), o ktorej má zmysel uvažovať, či je pravdivá alebo nepravdivá. Skutočnosť či konkrétny výrok je pravdivý alebo nepravdivý súvisí s jeho tzv. **pravdivostnou hodnotou**. Ak daný výrok je pravdivý, priradíme mu pravdivostnú hodnotu „*jeden*“ (1), Ak je nepravdivý, priradíme mu pravdivostnú hodnotu „*nula*“(0).

Príklady výrokov:

v_1: Uhlopriečky štvorca sú navzájom kolmé.
v_2 : Paríž je hlavné mesto Španielska.
v_3: Pre všetky reálne čísla a, b platí:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

v_4 :Vo vesmíre existujú inteligentné bytosti aj mimo slnečnej sústavy.

Výroky $\mathbf{v_1}$ a $\mathbf{v_3}$ sú pravdivé, výrok $\mathbf{v_2}$ je nepravdivý. O pravdivosti výroku $\mathbf{v_4}$ doposiaľ rozhodnúť nevieme, ale ide o výrok – na otázku o jeho pravdivosti existuje jednoznačná odpoveď.

Príklady výpovede, ktoré nie sú výrokmi:

- Koľko je hodín?
- Choď domov!
- Bratislava je číslo prirodzené.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Výroky teda nie sú otázky, príkazy, nezmysly,... Možno je pre vás prekvapením, že $\mathbf{v_4}$ výrok je, zatiaľ čo táto rovnosť, ale bez slov „pre všetky reálne čísla a, b platí:“ už výrokom nie je. Vynechaním týchto slov potom toto tvrdenie nie je výrok, lebo nevieme, čo znamenajú premenné a, b a pre ktoré ich hodnoty rovnosť nastáva.

Negácia výroku

Ak máme výrok v, tak jeho negáciu označujeme $\neg v$.
Ak výrok v je pravdivý, potom $\neg v$ je výrok nepravdivý.
Ak výrok v je nepravdivý, potom $\neg v$ je výrok pravdivý.

v	$\neg v$
Daný trojuholník ABC je ostrouhlý.	Daný trojuholník ABC je tupouhlý alebo pravouhlý.
Priamka t je dotyčnica danej kúžnice k.	Priamka t je sečnica danej krúžnice k alebo s ňou nemá žiaden spoločný bod.
$\sqrt{2}+\sqrt{3}\geq\sqrt{5}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}\langle\sqrt{5}$

Keď povieme, že nejaká množina má **aspoň** k **prvkov**, znamená to, že počet jej prvkov je **väčší alebo rovný číslu** k.
Keď povieme, že nejaká množina má **najviac** k **prvkov**, znamená, že počet jej prvkov je **menší alebo rovný číslu** k.

v	$\neg v$
Rovnica $x^8 - 1 = 0$ má aspoň dva reálne korene.	Rovnica $x^8 - 1 = 0$ má najviac jeden reálny koreň.
Medzi všetkými jednocifernými číslami sú najviac tri prvočísla.	Medzi všetkými jednocifernými číslami sú aspoň štyri prvočísla.
Daná množina má práve n + 1 prvkov.	Daná množina má najviac n alebo aspoň n + 2 prvkov.

Zložené výroky

- výroky, ktoré sú zložené z viacerých jednoduchých výrokov pomocou spojok.

Budeme sa zaujímať o to, ako závisí pravdivosť zloženého výroku na pravdivosti výrokov, z ktorých je zložený.

Zameriame sa len na najdôležitejšie typy zložených výrokov, ktorými sú **konjunkcia, disjunkcia, implikácia a ekvivalencia**.

Zložené výroky:

Ak p, q sú výroky, tak potom:
Konjunkcia: (p súčasne q) je pravdivý práve vtedy, keď oba výroky p, q sú pravdivé
$p \wedge q$
Disjunkcia: (p alebo q) je pravdivý práve vtedy, keď aspoň jeden z výrokov p, q je pravdivý
$p \vee q$
Implikácia: (p implikuje q) je nepravdivý práve vtedy, keď výrok p je pravdivý a q nepravdivý
$p \Rightarrow q$
Ekvivalencia: (p je ekvivalentné s q) je pravdivý práve vtedy, keď výroky p, q sú alebo oba pravdivé, alebo oba nepravdivé
$p \Leftrightarrow q$
Negácia: je pravdivý práve vtedy, keď výrok p je nepravdivý
$\neg p$

Príklady zložených výrokov

<u>konjuknc</u>ia
$p \wedge q$

Číslo 5 je prvočíslo a zároveň číslo nepárne.

<u>disjunkcia</u>
$p \vee q$

Číslo 5 je prvočíslo alebo číslo nepárne.

<u>implikácia</u>

$p \Rightarrow q$

Ak číslo 5 je prvočíslo, potom číslo 5 je nepárne.

ekvivalencia

$p \Leftrightarrow q$

Číslo 5 je prvočíslo práve vtedy, keď číslo je nepárne.

Tabuľka pravdivostných hodnôt

p	q	$p \vee q$	$p \wedge a$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Negácia zložených výrokov

Pre ľubovoľné výroky a, b platí:

1.) $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$

2.) $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

3.) $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$

4.) $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow b)$

$\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow \neg b)$

Kvantifikátorové výroky

V matematike poznáme dva druhy kvantifikátorov:
- **všeobecný** $\forall$ hovorí, že daná vlastnosť platí **pre všetky** prvky alebo tiež **pre každý** prvok, alebo tiež **pre ľubovoľný** prvok.
- **existenčný** $\exists$ vyjadruje, že **existuje aspoň jeden** prvok danej vlastnosti alebo že daná vlastnosť platí **aspoň pre jeden** prvok

Výroky, ktoré obsahujú všeobecný kvantifikátor, sa nazývajú **<u>všeobecné výroky</u>**, výroky, ktoré obsahujú kvantifikátor existenčný, sa nazývajú **<u>existenčné výroky</u>**.

Negácia kvantifikátorov

Pr1) Pre každý prvok množiny M platí, že má danú vlastnosť.
Aspoň jeden prvok množiny M nemá danú vlastnosť.

Pr2) Existuje aspoň jeden prvok množiny M, ktorý má danú vlastnosť.
Pre každý prvok množiny M platí, že nemá danú vlastnosť.

Všimnite si, že pri negácii kvantifikátorového výroku sa **existenčný kvantifikátor** nahradí **všeobecným** a zároveň sa slovo **„má“** nahradí slovom **„nemá“.**