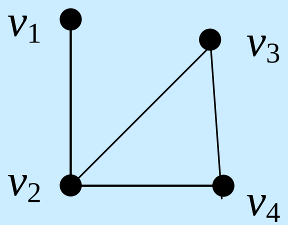
Reprezentácie grafov

Definícia : Matica priľahlosti A(G) grafu G = (V, H), resp. digrafu s vrcholmi v_1, v_2, ..., v_n, je štvorcová matica typu $n \times n$ s prvkami

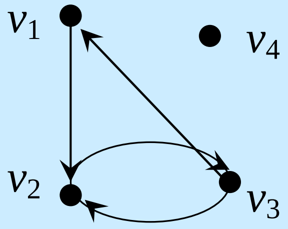
$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (v_i, v_j) \notin H \\ 1 & (v_i, v_j) \in H \end{cases}$$

$$\text{resp. } a_{ij} = \begin{cases} 0 & [v_i, v_j] \notin H \\ 1 & [v_i, v_j] \in H \end{cases}$$

Príklady :



$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



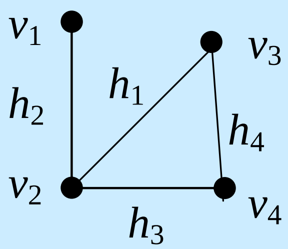
$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definícia : Matica incidencie B(G) grafu, resp. digrafu G = (V, H) s vrcholmi v_1, v_2, ..., v_n, a s hranami h_1, h_2, ..., h_m je matica typu $n \times m$ s prvkami

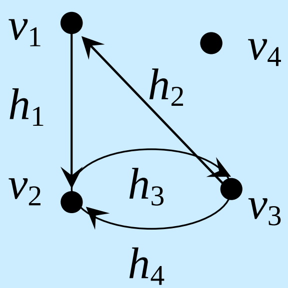
$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ak hrana } h_j \text{ neinciduje s vrcholom } v_i \\ 1 & \text{ak hrana } h_j \text{ inciduje s vrcholom } v_i \end{cases}$$

$$\text{resp. } b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{hrana } h_j \text{ neinciduje s vrcholom } v_i \\ -1 & v_i \text{ je koncový vrchol hrany } h_j \\ 1 & v_i \text{ je poč} \quad \text{vrchol hrany } h_j \end{cases}$$

Príklady :



$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definícia : Nech G = (V, H) je graf. ***Sledom*** S v grafe G nazveme striedavú postupnosť $v_0, h_1, v_1, h_2, v_2 \ldots, h_p, v_p$, ($p \geq 0$) vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_p \in$ V a hrán $h_1, h_2, \ldots, h_p \in$ H, kde $h_i = (v_{i-1}, v_i)$, pre $i = 1, 2, \ldots, p$.

Definícia : Sled S sa nazýva ***ťahom*** ak sú hrany $h_1, h_2, \ldots, h_p$, navzájom rôzne. ($h_i \neq h_j$, pre $1 \leq i < j \leq p$).

Definícia : Sled S sa nazýva ***cestou*** ak sú vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_p$, navzájom rôzne. ($v_i \neq v_j$, pre $1 \leq i < j \leq p$).

Definícia : Nech G = (V, H) je digraf. ***Orientovaným sledom*** S v grafe G nazveme striedavú postupnosť $v_0, h_1, v_1, h_2, v_2 \ldots, h_p, v_p$, ($p \geq 0$) vrcholov $v_1, v_2, \ldots, v_p \in$ V a orientovaných hrán $h_1, h_2, \ldots, h_p \in$ H, kde $h_i = [v_{i-1}, v_i]$, pre $i = 1, 2, \ldots, p$.

Definícia : Orientovaný sled S sa nazýva ***orientovaným ťahom*** ak sú hrany $h_1, h_2, \ldots, h_p$, navzájom rôzne. ($h_i \neq h_j$, pre $1 \leq i < j \leq p$).

Definícia : Orientovaný sled S sa nazýva ***dráhou*** ak sú vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_p$, navzájom rôzne. ($v_i \neq v_j$, pre $1 \leq i < j \leq p$).

Veta : Nech G = (V, X) je graf s pevne označenými vrcholmi a A = (a_{ij}) typu $n \times n$ je jeho matica priľahlosti. Potom prvok p_{ij} matice A^k udáva počet sledov dĺžky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j.

Definícia : Graf G = (V, H) sa nazveme ***súvislým***, ak pre každú dvojicu jeho vrcholov u, v ($u \neq v$) existuje cesta, ktorá ich spája.

Definícia : Maximálne súvislý podgraf G' = (V', H') grafu G = (V, H) nazveme ***komponentom*** grafu.

Definícia : Vrchol v grafu G = (V, H) nazveme ***artikuláciou***, ak počet komponentov grafu po odstránení vrchola v spolu s incidentnými hranami vzrastie aspoň o 1.

Definícia : Hranu h = (u, v) grafu G = (V, H) nazveme ***mostom***, ak počet komponentov grafu po odstránení hrany h vzrastie o 1.

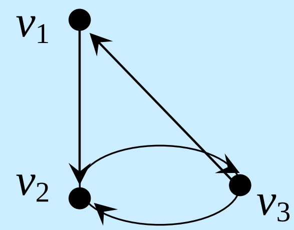
Veta : Nech je daný súvislý graf G = (V, H), pričom $|H| \geq 3$. Ak graf G obsahuje most, tak obsahuje artikuláciu.

Definícia : Minimálny počet vrcholov, ktorý potrebujeme z grafu G odstrániť, aby vznikol nesúvislý alebo triviálny graf nazývame ***vrcholová súvislosť*** v(G).

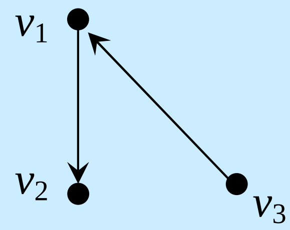
Definícia : Minimálny počet hrán, ktorý potrebujeme z grafu G odstrániť, aby vznikol nesúvislý alebo triviálny graf nazývame ***hranová súvislosť*** h(G).

Veta : Pre ľubovoľný graf G platí $v(G) \leq h(G) \leq m(G)$, kde m(G) je minimálny stupeň vrchola grafu G.

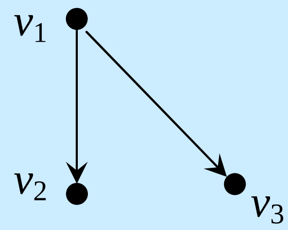
Definícia : Digraf G = (V, H) nazveme ***silne súvislý***, ak pre každé dva rôzne vrcholy *u*, *v* existuje dráha z *u* do *v* aj dráha z *v* do *u*.



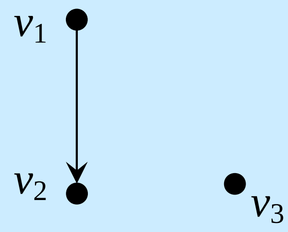
Definícia : Digraf G = (V, H) nazveme ***orientovane súvislý***, ak pre každé dva rôzne vrcholy *u*, *v* existuje dráha z *u* do *v* alebo dráha z *v* do *u*.



Definícia : Digraf G = (V, H) nazveme ***neorientovane súvislý***, ak pre každé dva rôzne vrcholy *u*, *v* existuje cesta z *u* do *v* (neberieme do úvahy orientáciu hrán).



Definícia : Digraf G = (V, H) nazveme ***nesúvislý***, ak nie je neorientovane súvislý



Definícia : Súvislý graf, ktorý ako podgraf neobsahuje kružnicu nazývame ***strom***.

Veta : Nech T = (V, H) je netriviálny strom potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné :

a) každá hrana stromu je mostom

b) $|H| = |V| - 1$

c) Pre každé dva rôzne vrcholy *u*, *v* existuje práve jedna cesta z *u* do *v*.

Definícia : Súvislý podgraf, ktorý je stromom a obsahuje všetky vrcholy pôvodného grafu sa nazýva ***kostrou***. ***Minimálnou kostrou*** je taká kostra, ktorej súčet ohodnotení hrán je minimálny. ***Maximálnou kostrou*** je taká kostra, ktorej súčet ohodnotení hrán je maximálny.

Algoritmus zostrojenia minimálnej kostry v hranovoohodnotenom súvislom grafe

1°Do kostry vyberieme ako prvú tú hranu (h_1) spolu s jej koncovými vrcholmi, ktorej ohodnotenie je minimálne.

2°Z nevybraných hrán grafu vyberieme tú hranu (h_i, $i = 2, 3, ..., n - 1$) spolu s jej koncovými vrcholmi, ktorej ohodnotenie je minimálne a jej výberom v grafe pozostávajúcom z vybraných vrcholov a hrán nevznikne kružnica.

3°Postup podľa bodu 2° opakujeme dovtedy, kým možno vybrať aspoň jednu ďalšiu hranu h_i podľa pravidiel bodu 2°. Ak tento postup už nemožno aplikovať, tak vybrané vrcholy a hrany tvoria minimálnu kostru

Algoritmus zostrojenia maximálnej kostry v hranovoohodnotenom súvislom grafe

1°Do kostry vyberieme ako prvú tú hranu (h_1) spolu s jej koncovými vrcholmi, ktorej ohodnotenie je maximálne.

2°Z nevybraných hrán grafu vyberieme tú hranu (h_i, $i = 2, 3, ..., n - 1$) spolu s jej koncovými vrcholmi, ktorej ohodnotenie je maximálne a jej výberom v grafe pozostávajúcom z vybraných vrcholov a hrán nevznikne kružnica.

3°Postup podľa bodu 2° opakujeme dovtedy, kým možno vybrať aspoň jednu ďalšiu hranu h_i podľa pravidiel bodu 2°. Ak tento postup už nemožno aplikovať, tak vybrané vrcholy a hrany tvoria maximálnu kostru