Matice

Definícia : Obdĺžnikovú schému $m \,.\, n$ prvok z množiny R usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov nazývame ***maticou*** typu $m \times n$ nad R a značíme A. Maticu A

zapisujeme $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definícia : Ak $m = n$, čiže matica je typu $n \times n$, hovoríme o ***štvorcovej matici*** stupňa n.

Definícia : Ak $a_{ij} = 0$, pre $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, hovoríme o ***nulovej matici***, označíme $O_{m \times n}$ alebo len O.

Definícia : Ak v štvorcovej matici stupňa n je $a_{ij} = 0$, pre $i = 1, 2, ..., n$, kde $i \neq j$, hovoríme o ***diagonálnej matici***.

Príklad : $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - diagonálna matica

Definícia : Ak v diagonálnej matici stupňa n je pre $i = 1, 2, ..., n$, $a_{ii} = 1$ hovoríme o ***jednotkovej matici***, značíme E_n alebo len E .

Príklad : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - jednotková matica

Definícia : Ak v matici typu $m \times n$ je $a_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$, hovoríme o ***hornej trojuholníkovej matici***, je $a_{ij} = 0$ pre všetky $i < j$, hovoríme o ***dolnej trojuholníkovej matici***.

Príklad : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ - horná trojuholníková matica

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ - dolná trojuholníková matica

Definícia : Ak v štvorcovej matici stupňa n je $a_{ij} = a_{ji}$ pre všetky i, j, hovoríme o ***symetrickej matici***, ak $a_{ij} = -a_{ji}$ pre všetky i, j, hovoríme o ***antisymetrickej matici***.

Príklad : $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ - symetrická matica

$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ - antisymetrická matica

Definícia : Maticu $A^T = \left(a_{ij}^T\right)$ typu $n \times m$ nazývame ***transponovanou maticou*** k matici $A = \left(a_{ij}\right)$ typu $m \times n$, ak pre všetky i, j je $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Príklad : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ -3 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ a $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

Definícia : Hovoríme, že matice $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ typu $m \times n$ sa rovnajú, ak pre i = 1, 2, ..., n je $a_{ij} = b_{ij}$.

Definícia : Súčtom matíc $A = \left(a_{ij}\right)$, $B = \left(b_{ij}\right)$ typu $m \times n$ rozumieme maticu $C = \left(c_{ij}\right)$ typu $m \times n$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. pre $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$

Definícia : ***Násobkom matice*** $A=(a_{ij})$ typu $m\times n$ číslom α rozumieme maticu $B=(b_{ij})$ typu $m\times n$, kde

$b_{ij}=\alpha a_{ij}$. pre $i=1, 2, ..., m$; $j=1, 2, ..., n$. V prípade $\alpha=-1$ maticu B nazývame ***opačnou maticou*** k matici A.

Definícia : ***Súčinom matíc*** $A=(a_{ij})$ typu $m\times p$ a $B=(b_{ij})$ typu $p\times n$ rozumieme maticu $C=(c_{ij})$ typu $m\times n$ kde

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

Veta : Pre ľubovoľné matice $A=(a_{ij})$ typu $m\times n$, $B=(b_{ij})$ typu $n\times p$, $C=(c_{ij})$ typu $n\times p$, a $D=(d_{ij})$ typu $p\times r$, jednotkové a nulové matice E_m, E_n, $O_{m\times n}$, $O_{p\times r}$, $O_{m\times p}$, $O_{n\times r}$ a ľubovoľné čísla α, β platí

1. $A(BD)=(AB)D$
2. $(B+C)D=BD+CD$
3. $A(B+C)=AB+AC$
4. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
5. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
6. $E_m A=A=A E_n$
7. $O_{m\times n}+A=A+O_{m\times n}$
8. $O_{m\times n} B=O_{m\times p}$

Definícia : Hovoríme, že matica B je ***inverznou maticou*** k štvorcovej matici A n-tého stupňa, ak platí

$$AB = BA = E_n$$

Inverznú maticu značíme $B = A^{-1}$

Veta : Nech pre štvorcové matice A, B n-tého stupňa existujú inverzné matice A^{-1}, B^{-1}.

Potom platí

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $E^{-1} = E$