Množiny

"Množina je súhrn predmetov, vecí, dobre rozlíšiteľných našou mysľou alebo intuíciou"

"Množina je súbor rôznych objektov, ktoré sú charakterizované spoločnými vlastnosťami, považovaných za jeden celok. "

Objekty tohto súboru sa nazývajú **prvky** alebo elementy **množiny**

$x \in A$ (x je prvkom množiny A)

$y \notin A$ (y nepatrí do množiny A)

Množiny môže byť daná – pravidlom alebo nejakou vlastnosťou

– vymenovaním jej prvkov

Mohutnosť množiny alebo kardinálne číslo je zovšeobecnením pojmu počet prvkov.

Definícia : zobrazenie $f : A \to B$ nazývame :

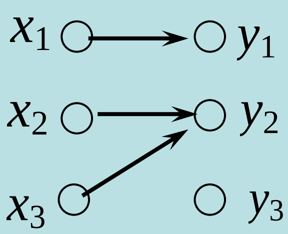
- **injektívne** (prosté) akk pre každé x_1, $x_2 \in$ A, platí

  ak $x_1 \neq x_2$ potom $f(x_1) \neq f(x_2)$A

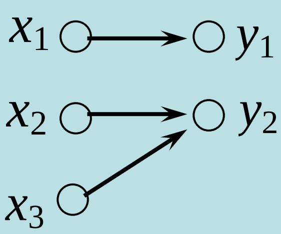
- **surjektívne** (na) akk ku každému $y \in$ B existuje aspoň jedno $x \in$ A

  také, že $y = f(x)$

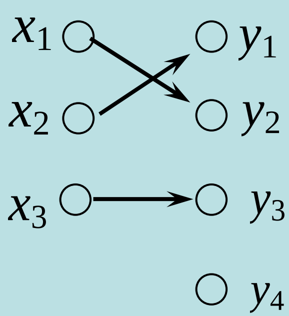
- **bijektívne** akk je injektívne a zároveň surjektívne



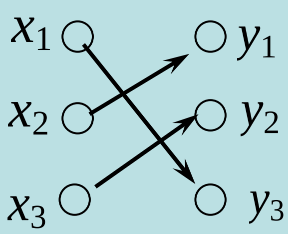
nie je prostá
nie je na



nie je prostá
je na



je prostá
nie je na



je prostá
je na

Definícia : množiny A, B majú **rovnakú mohutnosť**, ak existuje bijektívne

zobrazenie z jednej množiny na druhú $|A| = |B|$ alebo card A = card B.

Definícia : $n \in$ N. Množina A **má *n* prvkov** ak existuje bijekcia množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na A. Prázdna množina má 0 prvkov.

Množina A sa nazýva **konečná**, keď má *k* prvkov, kde *k* je prirodzené číslo.

Definícia : Množina, ktorá nie je konečná sa nazýva **nekonečná**.

Množina A sa nazýva **spočitateľná**, keď má rovnakú alebo menšiu mohutnosť ako množina N ($|A| \leq |N|$, ak existuje prosté zobrazenie množiny A do množiny prirodzených čísel).

Množina, ktorá nie je spočítateľná sa nazýva **nespočítateľná**.

Veta: Množina je spočítateľná, ak sa jej prvky dajú zoradiť do postupnosti.

Veta: Nech A je spočítateľná množina. Potom množina B je spočítateľná práve vtedy, keď existuje bijekcia z A na B.

Veta: Každá podmnožina spočítateľnej množiny je konečná alebo spočítateľná.

Veta: Ak množiny A, B sú spočítateľné, tak $A \cup B$ je spočítateľná množina a $A \cap B$ je konečná alebo spočítateľná

Veta: Ak množina A je konečná a množina B je spočítateľná, tak množina $A \cup B$ je spočítateľná a množina $A \cap B$ je konečná.

Veta (Dirichletov princíp): Ak $|X| < |Y|$ a $f : Y \to X$, tak existujú $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ také, že $f(y_1) = f(y_2)$.

Veta: Množina všetkých reálnych čísel je nespočítateľná.

metóda Cantorovej diagonály

$$\begin{array}{llllllll}
a_1 = & 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} & \ldots \\
a_2 = & 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} & \ldots \\
a_3 = & 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots & a_{3n} & \ldots \\
 & & & & & & \\
a_n = & 0, & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots & a_{nn} & \ldots
\end{array}$$

Príklady :

1) Nech $a, b, c, d \in$ R, $a < b$, $c < d$. Zostrojte bijekciu medzi každou dvojicou množín

a) $(0, 1)$; (a, b); (c, d); $(-\infty, a)$, (a, ∞); R; $(-\infty, a) \cup \langle b, \infty)$;

b) $(0, 1\rangle$; $(a, b\rangle$; $(c, d\rangle$; $(-\infty, a\rangle$; $\langle a, \infty)$; $\langle a, b)$, $\langle c, d)$;

c) $\langle 0, 1\rangle$; $\langle a, b\rangle$; $\langle c, d\rangle$;

2) Zostrojte prosté zobrazenie množiny A do množiny B, ak

A=R, B=$\{[x, y] \in \mathrm{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$

3) Zistite, ktoré z nasledujúcich zobrazení sú injektívne, resp. surjektívne

a) f : N $\to$ N, kde $f(n) = n + 1$

b) f : K $\to$ K, kde K je množina kladných celých čísel menších ako k+1, t.j.

$$f(i) = \begin{cases} i+1, \text{ pre } 1 \le i < k \\ 1, \text{ pre } i = k \end{cases}$$

4) Akú mohutnosť má množina všetkých kladných racionálnych čísel

5) Dokážte, že množina $\{x : x = 5\,k + 1,\ k \in \mathrm{N}\}$ je spočítateľná