# Rekurentné rovnice, metóda vytvárajúcich funkcií.

# Rekurentné rovnice

Príklad : Určte na koľko častí je rovina rozdelená *n*-priamkami (žiadne dve nie sú rovnobežné, žiadne 3 neprechádzajú tým istým bodom)

Príklad : Pár králikov privádza raz za mesiac na svet dve mláďatá samca a samičku. Títo novonarodení králici prinášajú ďalšie prírastky už za 2 mesiace po narodení. Koľko párov králikov budeme mať za rok, ak sme mali na začiatku jeden pár králikov?

# Niektoré vlastnosti Fibonacciho čísel

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

1. $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_n = F_{n+2} - 2$

2. $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$

3. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1} - 1$

Príklad : Určte koľkými spôsobmi môžeme výjsť schodište o *n* schodoch, ak vynecháme pri každom kroku najviac jeden schod.

Príklady :

- *Určte koľkými spôsobmi môžeme vydláždiť chodbu tvaru obdlžníka 2xn obdĺžnikovými dlaždicami 2x1.*
- *Určte počet spôsobov, ako vynásobiť n činiteľov s ohľadom na uzátvorkovanie a poradie.*
- *Určte koľko rôznych vlajok možno ušiť z n vodorovných rovnako širokých červených a bielych pruhov tak, aby žiadne dva biele pruhy neboli vedľa seba.*

# Lineárne rekurentné vzťahy k-tého rádu s konštantnými koeficientami

*Charakteristická rovnica rekurentného vzťahu*

$$f(n+2)=a_1 f(n+1)+a_2 f(n)$$

je $x^2 = a_1 x + a_2$

*Ak charakteristická rovnica má dva rôzne korene* $x_1$, $x_2$ je riešením

$$f(n) = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}$$

*kde* $c_1$, $c_2$ *sú ľubovoľné konštanty*

*Ak charakteristická rovnica má dvojnásobný koreň* $x_1 = x_2$ je riešením

$$f(n) = (c_1 + c_2 n) x_1^{n-1}$$

*kde* $c_1$, $c_2$ *sú ľubovoľné konštanty*

Príklady :

- *Určte n-tý člen Fibonacciho postupnosti.*
- *Určte f(n), ak*
  - $f(n+2) - 4f(n+1) + 13f(n) = 0$
  - $f(n+2) + f(n) = 0$
- *Určte f(n), ak*
  - $f(n+2) - f(n+1) + f(n) = 0$, $f(1)=-0{,}25$, $f(2)=-0{,}5$
  - $f(n+2) - 7f(n+1) - 12f(n) = 0$, $f(1)=1$, $f(2)=7$.

# Metóda vytvárajúcich funkcií

Príklad : Sú dané 3 banány, 2 grepy, 1 pomaranč. Vypočítajte všetky *k*-členné kombinácie z týchto 6 kusov ovocia.

*Funkcia f je vytvárajúcou funkciou postupnosti $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$, ..., ak existuje interval I taký, že pre všetky $x \in I$, môžeme funkciu f vyjadriť ako mocninný rad $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots$ .*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}x^k$$

# Počet *k*-členných kombinácií z *n* prvkov bez opakovania

$$a_1 \to 1 + x$$

$$a_2 \to 1 + x$$

$$\vdots$$

$$a_n \to 1 + x$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

# Počet *k*-členných kombinácií z *n* prvkov s opakovaním

$a_1 \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$a_2 \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$\vdots$

$a_n \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k$$

# Počet *k*-členných kombinácií z *n* prvkov z nich je každý aspoň raz

$a_1 \to x + x^2 + x^3 + \ldots$

$a_2 \to x + x^2 + x^3 + \ldots$

$\vdots$

$a_n \to x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$\left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)^n = x^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k$$

# Počet *k*-členných kombinácií z *n* prvkov z nich je každý aspoň *m*-krát

$$a_1 \longrightarrow x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots$$

$$a_2 \longrightarrow x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$a_n \longrightarrow x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots$$

$$\left(x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots\right)^n = x^{nm}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^n = \sum_{j=mn}^{\infty}\binom{j-mn+n-1}{n-1}x^j$$

Príklady :

- *Určte počet k-členných skupín (v nich nezáleží na poradí) zostavených z mužov, žien a detí, a platí : ak v tejto skupine je aspoň jedno dieťa, musí v nej byť aspoň jedna žena.*
  - *počet mužov, žien a detí je neobmedzený*
  - *počet mužov je 3, počet žien je 3, počet detí je 3*

# Vytvárajúce funkcie pre variácie bez opakovania

$$a_1 \to 1 + x$$

$$a_2 \to 1 + x$$

$$\vdots$$

$$a_n \to 1 + x$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k! \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(n) \frac{x^k}{k!}$$

# Vytvárajúce funkcie pre variácie s opakovaním

$$a_1 \to 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$a_2 \to 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$a_n \to 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\left(e^x\right)^n = e^{nx} = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

# Počet *k*-členných variácií z *n* prvkov, v ktorých je každý prvok aspoň raz

$$a_1 \to \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$a_2 \to e^x - 1$$

$$\vdots$$

$$a_n \to e^x - 1$$

$$\left(e^x - 1\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k$$

Príklady :

- *Určte počet k-ciferných prirodzených čísel, v ktorých dekadickom zápise nie je 0 a sú v ňom alebo len cifry párne alebo len cifry nepárne, vždy však každá aspoň raz.*
- *Určte počet k-ciferných prirodzených čísel, v ktorých dekadickom zápise*
  - *nie je 0 a sú 2 sedmičky*
  - *sú dve sedmičky*