Množiny, relácie, zobrazenia

Množiny

"Množina je súhrn predmetov, vecí, dobre rozlíšiteľných našou mysľou alebo intuíciou"

"Množina je súbor rôznych objektov, ktoré sú charakterizované spoločnými vlastnosťami, považovaných za jeden celok. "

Objekty tohto súboru sa nazývajú **prvky** alebo **elementy množiny**

$x \in$ A (x je prvkom množiny A)

$y \notin$ A (y nepatrí do množiny A)

Množiny môže byť daná – charakteristickou vlastnosťou

– vymenovaním jej prvkov

Množina B je podmnožinou množina A , ak každý prvok množiny B je zároveň prvkom množiny A, t.j. $B \subseteq A \equiv \forall x : x \in B \Rightarrow x \in A$

Množina, ktorá neobsahuje žiadny prvok sa nazýva prázdna a označuje sa $\emptyset$.

Základné operácie s množinami

A* prienikom *B $(A \cap B)$ je množina, ktorej prvky patria súčasne do *A* aj *B*.

A* zjednotenie *B $(A \cup B)$ je množina, do ktorej patria všetky objekty, ktoré sú prvkami *A* alebo prvkami *B*.

Rozdiel *B* a *A* $(B - A)$. je množina pozostávajúca zo všetkých objektov, ktoré sú prvkami *B*, ale nie sú prvkami *A*.

Karteziánskym súčinom množín A a B je množina, ktorej prvkami sú usporiadané dvojice $[x_1, x_2]$, kde $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ a označujeme $A \times B$.

Množina A sa rovná množine B, ak obe množiny obsahujú tie isté prvky

$$A = B \equiv \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Množina všetkých podmnožin danej množiny A sa nazýva potenčná množina $\mathcal{P}$(A)

Množiny A, B sa nazývajú disjunktné, ak $A \cap B = \emptyset$.

Množina prirodzených čísel je najmenšia podmnožina množiny reálnych čísel R,

pre ktorú platí : i) $1 \in$ N

ii) Ak množina N obsahuje číslo *k*, tak obsahuje aj číslo *k*+1

Dôkaz matematickou indukciou :

Predpokladajme, že každému prirodzenému číslu n je priradený (pravdivý alebo nepravdivý) výrok **P(*n*)**.
Ak

I. výrok **P(1)** je pravdivý
II. pre každé prirodzené číslo *k* z platnosti výroku **P(*k*)**vyplýva platnosť výroku **P(*k* + 1)**,

tak výrok **P(*n*)** platí pre každé prirodzené číslo

Úplna matematická indukcia :

Predpokladajme, že každému prirodzenému číslu *n* je priradený (pravdivý alebo nepravdivý) výrok **P(*n*)**.

Ak pre každé prirodzené číslo $k < n$ z platnosti výroku **P(*k*)** vyplýva platnosť výroku **P(*n*)**, tak výrok **P(*n*)** platí pre každé prirodzené číslo *n*.

Relácie a zobrazenia

Karteziánsky súčin n množín $A_1, A_2, ..., A_n$, je $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Prvkom karteziánskeho súčinu $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ je usporiadaná n-tica $[x_1, x_2, ..., x_n]$, kde $x_i \in A_i$, $1 \leq i \leq n$

Podmnožinu karteziánskeho súčinu $A \times A \times ... \times A = A^n$, $n \in N$ nazývame ***n*-árnou relaciou** na množine A.

Poznámka : pre $n = 1$ nazývame **unárna** relácia, pre $n = 2$ nazývame **binárna** relácia, pre $n = 3$ nazývame **ternárna** relácia

Binárna relácia E na množine A sa nazýva

reflexívna, ak pre každé $a \in A$ platí $a E a$,

symetrická, ak z platnosti $a E b$ vyplýva $b E a$,

antisymetrická, ak z platnosti $a E b$ a zároveň $b E a$ vyplýva a = b,

tranzitívna, ak z platnosti $a E b$ a zároveň $b E c$ vyplýva $a E c$,

Binárna relácia na množine A, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna sa nazýva ***ekvivalencia*** alebo ***relácia ekvivalencie*** na množine A

Binárna relácia $E \subset A^2$, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna sa nazýva ***reláciou čiastočného usporiadania*** na množine A, resp. ***čiastočným usporiadaním*** množiny A.

Zobrazenie *f* z množiny A do množiny B chápeme ako určité pravidlo, ktoré každému prvku *a* z množiny A jednoznačne priradí prvok *b* z množiny B. T.j. $\forall a \in A, b_1, b_2 \in B, [a, b_1] \in f \wedge [a, b_2] \in f \Rightarrow b_1 = b_2$

Nech *f*: A→B, *g*: B→C sú zobrazenia. Potom kompozíciu (zložené zobrazenie) $f \circ g$ je zobrazením $f \circ g$ *f*: A→C, kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ pre *x*, ktoré patria do definičného oboru *f* a $f(x)$ do definičného oboru $g(x)$.

Zobrazenie $f : A \rightarrow B$ nazývame :

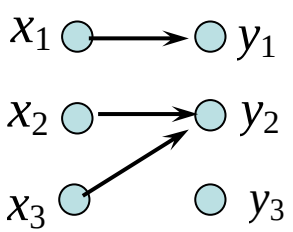
- **injektívne** (prosté) akk pre každé $x_1, x_2 \in$ A, platí

  ak $x_1 \neq x_2$ potom $f(x_1) \neq f(x_2)$A

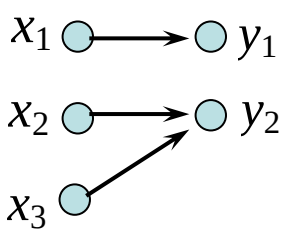
- **surjektívne** (na) akk ku každému $y \in$ B existuje aspoň jedno $x \in$ A

  také, že $y = f(x)$

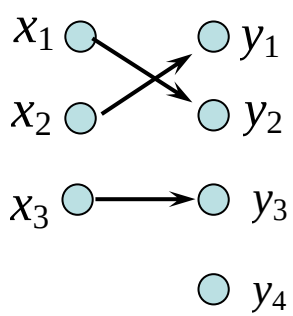
- **bijektívne** akk je injektívne a zároveň surjektívne



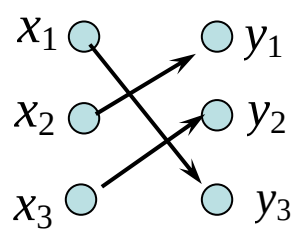
nie je prostá
nie je na



nie je prostá
je na



je prostá
nie je na



je prostá
je na

Zobrazenie $f^{-1} : Y \to X$ sa nazýva ***inverzné zobrazenie*** k zobrazeniu $f : X \to Y$, ak platí $f \circ f^{-1}$ je rovné identickému zobrazeniu id_x.

K zobrazeniu $f : X \to Y$ existuje inverzné zobrazenie f^{-1} vtedy a len vtedy, ak zobrazenie f je bijektívne.

Ne ch $n \in$ N. Množina A **má *n* prvkov** ak existuje bijekcia množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na A. Prázdna množina má 0 prvkov. Množina A sa nazýva **konečná**, keď má *k* prvkov, kde *k* je prirodzené číslo.

Množina, ktorá nie je konečná sa nazýva **nekonečná**. Množina A sa nazýva **spočitateľná**, keď má rovnakú alebo menšiu mohutnosť ako množina N ($|A| \leq |N|$, ak existuje prosté zobrazenie množiny A do množiny prirodzených čísel).
Množina, ktorá nie je spočítateľná sa nazýva **nespočítateľná**.