# GRÉCKA MATEMATIKA II

## VÝZNAMNÍ STAROVEKÍ GRÉCKI MATEMATICI

**Mathematics is the theory of symbolic thinking, numerical relations and geometric forms which are not catchable and that we can understand. Greek mathematicians were the first, who began receipt and study the ideal world of mathematical terms, postulates and proofs. The aim of this article is to give several impulses from the history of mathematics for motivation in education.**

Keď Pytagoras objavil svoju poučku, obetoval sto volov. Od tých čias sa všetky voly trasú, keď sa nájde nová pravda.

***Honoré de Balzac***

Pythagoras zo Samu vyvinul niečo, čomu by sme mohli hovoriť náuka o číslach, a odštartoval tak prvú zlatú éru matematiky.

Vďaka jeho prácam prestali byť čísla len nástrojom počítania a začalo sa o nich uvažovať ako o abstraktných objektoch.

Pythagoras študoval vlastnosti jednotlivých čísel, vzťahy medzi nimi a zákonitosti, ktoré vytvárajú. Prišiel na to, že čísla existujú nezávisle na našom svete, takže ich štúdovanie nie je ovplyvnené nepresnosťou pozorovania.

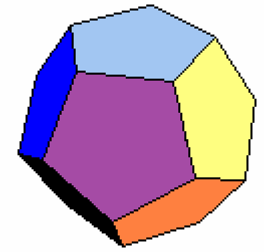
Pytagoras zo Samu
569 BC - 475 BC

Pythagoras veľa cestoval od Indie až k Británii a všimol si, že Egypťania a Babylončania vyjadrili každý výpočet vo forme predpisov či postupov, ktoré potom bolo možné slepo krok za krokom nasledovať. Tieto postupy sa tradovali z generácie na generáciu, dávali však vždy správnu odpoveď na položenú otázku. Nikto sa nezamýšľal, čo sa za tými postupmi skrýva, najdôležitejšie bolo, že to fungovalo. "*Prečo tomu je tak*?", to bola nepatričná otázka.

Po čase sa usadil na svojom rodnom ostrove Samos. Pretože nezískal žiadnych slobodomyseľných študentov, ponúkol jednému mladíkovi, že mu bude platiť, keď sa stane jeho žiakom. Pytagoras – učiteľ platil svojmu študentovi tri oboly za každú hodinu, ktorú študent navštívil, a časom zistil, že počiatočná neochota sa postupne zmenila na túžbu niečo nové sa dozvedieť. Aby svojho študenta Pytagoras vyskúšal, predstieral, že už si nebude môcť dovoliť ho platiť, a že výuka bude musieť prestať. Študent zareagoval očakávaným spôsobom – ponúkol Pytagorovi, že naopak on bude platiť za svoje štúdium. Žiak sa stal tovarišom. Pytagoras sa pokúsil založiť svoju vysnenú školu – „Pytagorov polkruh“ no jeho snahy viedli k tomu, že spolu so svojou matkou a tovarišom musel z ostrova utiecť.

Pytagoras odišiel do Južného Talianska a usadil sa v Krotone. Jeho mecenášom sa stal najbohatší človek Krotonu Milon, ktorý bol známy ako najsilnejší muž svojej doby a v tej dobe bol oveľa známejší ako Pytagoras najmä tým, že 12 krát vyhral Olympijské a Pythické hry čo bol dovtedy rekord. Mal záľubu aj vo vede, a tak vyčlenil jedno krídlo svojho domu aby v ňom mohol Pytagoras založiť svoju školu. Dnes známu ako **Bratstvo** – spolok, ktoré malo až 600 stúpencov. Z toho času sa zachovala veľmi pekné Pytagorovo vysvetlenie pojmu filozof : “*Život môže byť prirovnaný k Olympijským hrám, lebo medzi tým množstvom ľudí, ktoré tam nájdeme sú takí, ktorých tam pritiahla možnosť zisku, iní sú túžiaci po sláve a cti, sú však medzi nimi aj takí, ktorí tam prišli aby všetko pozorovali a porozumeli tomu, čo sa tam deje. Zo životom je to podobné. Niektorí sú vedení vidinou bohatstva, iní slepo nasledujú svoju túžbu vládnuť a dominovať. Najvzácnejšiemu typu ľudí však ide o odhaľovanie zmyslu života ako takého a o porozumenia tajomstva prírody. Týmto ľuďom hovoríme filozofi, pretože i keď nikto z nás nemôže vedieť všetko, môžeme milovať vedomosť ako kľúč k odhaleniu tajomstva prírody*”.

I keď o pytagorovej škole vedelo mnoho ľudí, nikto okrem členov Bratstva nevedel žiadne podrobnosti, lebo skladali prísahu mlčanlivosti. A tak sa stalo, že jeden, ktorý oznámil verejne objav nového pravidelného mnohostena – 12-stena (Telesa ohraničeného 12 zhodnými pravidelnými 5-uholníkmi). Bol odsúdený k smrti utopením. Práve vysoký stupeň utajenia je jedným z dôvodov, prečo máme tak málo vierohodných svedectiev o ich výsledkoch a úspechoch.



pravidelný dvanásťsten
dodecahedron

Určite však vieme, že Pytagoras zmenil chápanie matematiky. Členovia komunity verili, že porozumením vzťahov medzi číslami dokážu odhaliť tajomstvo vesmíru a priblížiť sa k bohom. Konkrétne sa Bratstvo zameralo na štúdium čísel, ktoré označujú množstvo (1, 2, 3, ... a zlomky), čiže prirodzené čísla N a kladné racionálne čísla $Q^+$.

Pytagoras prišiel na myšlienku, že číslo je podstatou všetkých vecí, lebo tvorí základ všetkého existujúceho. Má aj tú zvláštnosť, že je nevyhnutné, večné, nekonečné, nevzniklo ani nezanikne a všetkému dáva formu. Vysvetľuje to takto: „*Hmotnosť vzniká matematickým obmedzením neobmedzeného, ako napr. oheň, ktorý je obmedzený štyrmi stenami, zem šiestimi stenami, éter dvanástimi, voda dvadsiatimi a pod.. Navyše každému číslu prisudzuje isté vlastnosti; sedmičke zdravie, osmičke lásku, trojke manželstvo, ap.*“

Medzi nekonečne veľa číslami hľadalo Bratstvo čísla zvláštnej dôležitosti. Tieto čísla nazvali „*dokonalé čísla*“. Podľa Pytagora závisela dokonalosť čísla so súčtom jeho deliteľov – vlastné delitele (vlastné delitele – všetky kladné delitele okrem seba samého). Dnes okrem dokonalých čísel poznáme *redundantné čísla* (súčet vlastných deliteľov čísla je väčší ako dané číslo) a abudantné čísla (súčet vlastných deliteľov čísla je menší ako dané číslo).

Napríklad :

| *číslo* | *jeho delitele* | súčet vlastných deliteľov |
|---|---|---|
| 12 | 1, 2, 3, 4, 6 | 16 |
| | 12 < 16 číslo nazveme **redundantné** | |
| 10 | 1, 2, 5 | 8 |
| | 10 > 8 číslo nazveme **abudantné** | |
| 6 | 1, 2, 3 | 6 |
| | 6 = 6 číslo nazveme **dokonalé** | |

Dokonalé čísla mali magický význam. Boh stvoril svet za 6 dní, Lunárný mesiac – Mesiac obieha okolo Zeme za 28 dní.

Čím väčšie prirodzené čísla uvažujeme tým ťažšie je nájsť medzi nimi dokonalé číslo.

Tretím je 496
Štvrtým 8 128

Piatym 33 550 336

Okrem toho, že dokonalé čísla sa rovnajú súčtu svojich vlastných deliteľov, majú ešte iné známe vlastnosti:

- dokonalé čísla sú súčtom členov postupnosti po sebe idúcich prirodzených čísel
  6 = 1 + 2 + 3
  28 = 1 + 2 + 3 + .... + 7
  496 = 1 + 2 + 3 + ... + 31

Pytagora neuspokojilo len hľadanie. Jedným z postrehov bolo odhalenie súvislosti dokonalými číslami a mocninami 2.

- žiadna z mocnín 2 nie je dokonalým číslom, pretože súčet ich deliteľov je vždy o jednotku menší než číslo samé
  $2^2 = 4$ delitele 1, 2 súčet 3
  $2^3 = 8$ delitele 1, 2 , 4 súčet 7
  $2^4 = 16$ delitele 1, 2, 4, 8 súčet 15

O dve storočia neskôr súvislosť medzi dokonalými číslami a mocninami dvojky odhalil Euklides. Dokázal, že každé dokonalé číslo sa dá zapísať v tvare $2^n\ (2^{n+1} – 1)$,

teda napríklad:

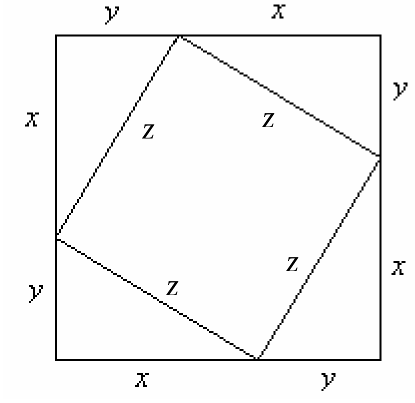
$$6 = 2^1 * (2^2 - 1)$$
$$28 = 2^2 * (2^3 - 1)$$
$$496 = 2^4 * (2^5 - 1)$$

Dnes počítače pokračujú v hľadaní dokonalých čísel doteraz najväčším nájdeným dokonalým číslom je číslo $2^{216\ 090}\ (2^{216\ 091} – 1)$, ktoré má viac ako 130 000 cifier.
Existuje veľmi veľa čísel, pre ktoré je súčet ich deliteľov len o jednotku menší ako číslo samo – **nepatrne abundantné** (všetky mocniny 2). Zdá sa však, že neexistujú čísla, ktoré by boli **nepatrne redundatné** (o jednotku väčšie ako súčet ich deliteľov). Ani dnes nevieme také čísla nájsť ani ukázať, že také čísla neexistujú.

Ďalší významný výsledok Pytagorovej školy je známa Pytagorova veta :
*Veľkosť plochy štvorca nad preponou pravouhlého trojuholníka je rovný súčtu veľkosti plochy štvorcov nad oboma jeho odvesnami.*

Táto veta je síce spojovaná s menom Pytagora ale bola už známa Číňanom a Babylončanom aspoň o tisíc rokov skôr. Tieto národy nevedeli, že poučka platí pre všetky pravouhlé trojuholníky. Spozorovali ich platnosť pre všetky pravouhlé trojuholníky, s ktorými sa stretávali, nevedeli však dokázať, že to platí pre všetky pravouhlé trojuholníky na svete. Dôvod prečo táto veta náleží Pytagorovi je ten, že on prvý bol schopný ukázať jej všeobecnú platnosť.

Úlohou je ukázať, čo to platí pre ľubovoľný pravouhlý trojuholník. Kľúčom k dôkazu je nasledujúci obrázok




Veľkosť plochy veľkého štvorca môžme zistiť dvoma spôsobmi.

1. spôsob $(x + y)^2$
2. spôsob vypočítať plochu 4 trojuholníkov ( $\frac{1}{2}xy$ ) + veľkosť plochy štvorca ($z^2$)

Keďže ide o ten istý štvorec platí $x^2 + 2xy + y^2 = 2xy + z^2$

z toho $z^2 = x^2 + y^2$

Pytagoras zomrel v správnom presvedčení, že jeho veta, ktorá bola pravdivá 500 rokov pred Kristom zostane pravdivá večne.

Pytagoras objavil podobnú číselnú zákonitosť aj v hudbe. Zaoberal sa zvukom, ktorý vydávala struna napínaná závažím. Zistil, že zvuk strún znie harmonicky, keď sú hmotnosti závažia, ktoré napínajú struny, v celočíselných pomeroch. Je známy nasledujúci Jamblichov príbeh o Pytagorovi ako objavil princíp hudobnej harmónie.

*Raz bol Pytagoras zaujatý myšlienkou zostrojiť mechanické zariadenie, ktoré bolo dôvtipným a spoľahlivým pomocníkom ľudského sluchu. Niečo, čo by bolo analógiou pravítka a kružidla či iných optických zariadeniach ako pomocníkov zraku, alebo ako má hmat svojich pomocníkov v pojmoch veľkosť, hmotnosť či miera. Akýmsi šťastným božím riadením sa Pytagoras raz prechádzal okolo vyhni a počúval ako kladiva búšiace do kovu vydávajú pestrú zmes zvukov, ktoré až na jednu výnimku ladili. Pytagoras okamžite vbehol do vyhne, aby sa pozrel v čom je podstata tohto súzvuku. Zistil, že väčšina kladív môžu búchať súčasne, a že takto produkovaný zvuk znie príjemne, zatiaľ čo pri použití jedného konkrétneho kladiva vznikol zakaždým zvuk veľmi nepríjemný. Skúmal kováčove nástroje a zistil, že kladiva, ktoré spolu ladili vyhovovali jednoduchému matematickému pravidlu – ich hmotnosti sa dali vyjadriť jednoduchými pomermi. Teda napríklad kladiva, ktorých hmotnosti boli polovicou, dvoma tretinami alebo troma štvrtinami hmotnosti najväčšieho kladiva vytvárali nádherný súzvuk. Naproti tomu hmotnosť onoho kladiva, ktoré spôsobili nepríjemný zvuk, nebolo v žiadnom jednoduchom vzťahu k hmotnosti ostatných kladív.*

Hudba, harmónia a čísla tvorili základ pytagorejskej výchovnej metódy, lebo pozdvihujú dušu k Bohu. V ich učení sa miesila matematika s číselnou mystikou. Pythgoras, zakladateľ sekty, bol podľa tradície v Egypte aj Babylone, kde sa od babylonských mágov naučil číselnú mystiku, astronómiu a hudobnú náuku. Podľa iných správ sa dokonca stretol so Zarathustrom. Pytagoras sa nazval ***filozofom***, hovoril totiž, že nie je mudrc, ale len milovník múdrosti. Od neho pochádza samotný termín filozofia. Po Pytagorovej smrti nastal v pytagorejskom bratstve rozkol. Vyvolal ho Hippasos, ktorý porušil pravidlá sekty. Dovolil vylepšovať učenie majstra a dopĺňať ho rôznymi novinkami (skonštruoval guľu opísanú okolo dvanásťstena, v hudobnej harmónii vedľa oktávy, kvinty a kvarty zaviedol aj dvojitú oktávu a duodecimálu).

Hippasovi nasledovníci sa označili ako ***mathématikoi***, a ich nasledovníkmi sme aj my, lebo matematiku považujeme za verejnú vec. V protiklade k nim stáli ***akusmatikoi*** (tí, čo chcú počuť) čo boli členovia bratstva, ktorí naďalej dodržiavali staré predpisy a odovzdávali ďalej posvätné učenie (akusmata). Postupne sa pytagorejské hnutie rozpadlo na viaceré nezávislé sekty, ktoré existovali po dobu zhruba dvoch storočí. Pytagorejci rozoznávali štyri ***mathématai***, t.j. vedecké disciplíny: *aritmetika* (teória čísel), *harmonika* (teória hudby), *geometria* a *astrologia* (náuka o hviezdach). Z tohto dôvodu je napríklad v angličtine matematika označovaná ako matematics, teda plurálom, lebo existujú štyri matematiky.

Teda ***čísla determinujú hudobnú harmóniu***. Odtiaľto už nie je ďaleko k hlavnej téze pytagorejskej filozofie, že totiž svet je harmóniou protikladov, vyjadrených pomocou čísiel. Objavil číselné pomery, ktoré určujú intervaly hudobnej stupnice a tvrdil, že rovnaké pomery vládnu aj medzi vzdialenosťou Zeme od Slnka, Mesiaca a jednotlivých planét. Na základe toho tvrdil, že planéty sú vo vzájomnom súlade a označil to za "*hudbu sfér*". Pomocou čísel vysvetľoval aj Vesmír. Nepárne čísla pokladal za nevhodné, lebo sú nekonečné a nedajú sa deliť 2, párne čísla pokladal za božské.

Pytagorova škola bola napadnutá obyvateľmi, ktorých viedol Kylon jeden z odmietnutých, ktorí chceli študovať v Pytagorovej škole. Práve to spôsobilo, že žiaci sa rozutekali a Pytagoras bol zabitý a vďaka tomu sa mnohé spôsoby, dôkazy, prezradili, napr.: tajomstvo pytagorejských trojíc,...

Na práce Pytagora a jeho žiakov takmer dvesto rokov neskôr nadviazal Euklides. S jeho menom sa spája nasledujúci citát :

Niet kráľovskej cesty ku geometrií. Bez práce nie sú koláče, ani geometria

***Euklides***

Euklides z Alexandrie sa narodil 330 pred Kristom. Podobne ako Pytagoras aj on veril v hľadanie matematickej pravdy ako takej a nezaujímal sa o praktické využitie svojej práce.

Traduje sa príbeh o študentovi, ktorý sa opýtal, k čomu bude to čo sa učí. Na konci hodiny sa Euklides obrátil ku svojmu otrokovi a povedal: „*Daj tomu chlapcovi peniaz, lebo je jeho prianím, aby mal zisk zo vzdelania*“. Na to bol študent vylúčený zo štúdia.

Euklides venoval veľkú časť života spisovaním diela ***Základy*** (Stocheia). Základy boli prvým z diel, ktoré boli napísané deduktívnym spôsobom. Autor si zvolil systém axióm, z ktorých použitím pravidiel logiky postavil celú teórie geometrie. Po viac ako 2000 rokov sa táto kniha stala vzorom pre iné vedné odbory. Až do 20. storočia to bolo po Biblii druhé najpredávanejšie dielo všetkých dôb. Skladá sa z 13 kníh, v ktorých uvádzal vlastné výsledky a známe kompilácie vtedajších matematických vedomostí. Začínajú definíciami a piatimi postulátmi :

I. *Každými dvoma bodmi možno preložiť priamku.*
II. *Každú časť priamky možno neobmedzene predĺžiť.*
III. *Z ľubovoľného bodu možno opísať kružnicu s ľubovoľným polomerom.*
IV. *Všetky pravé uhly sú zhodné.*
V. *Bodom neležiacim na danej priamke možno viesť práve jednu rovnobežku s danou priamkou.*

Campusov preklad *Základov* z roku 1482

Knihy I – VI sú venované geometrií roviny. V prvej a druhej knihe rozoberá niektoré základné vlastnosti trojuholníkov, rovnobežiek, rovnobežníkov, obdĺžnikov a štvorcov. V nej sa nachádzajú známe euklidové vety o výške. V tretej a štvrtej rozoberá problémy kružnice a kruhu a sú venované pytagorovému Bratstvu. Piata kniha je venovaná práci Eudoxa súmerateľnosti a nesúmerateľnosti matematických veličín. Šiesta kniha pojednáva o aplikáciách piatej knihy. Knihy siedma až deviata pojednávajú o teórií čísel. Nájdeme tam Euklidov algoritmus na nájdenie spoločnej miery dvoch úsečiek, ktorý neskôr využíva na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel a vlastnosti geometrického radu. V desiatej knihe Základov načal tému iracionality, t.j. ukázal, že existuje číslo, ktoré sa nedá vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel. XI – XIII knihe pojednáva o geometrií telies.

V Základoch je rozpracovaný aj spôsob dokazovania rovnosti dvoch geometrických objektov. Dnes sú známe ako osem Euklidových zásad pre pochopenie toho, že dva dané objekty majú rovnakú veľkosť, poprípade, že jeden z nich má veľkosť väčšiu ako druhý :

1. *Veličiny tomu istému rovné sú navzájom rovné.*
2. *Ak sa pridajú veličiny rovné k rovným, tak i celky sú rovné.*
3. *Ak odoberieme od rovných rovné, zostávajúce časti rovné sú.*
4. *Ak pridáme k nerovným rovné, celky sú nerovné.*
5. *Dvojnásobky toho istého rovné sú navzájom.*
6. *Polovičky toho istého rovné sú navzájom.*
7. *Čo sa navzájom kryje, rovné navzájom je.*
8. *Celok je väčší ako časť.*

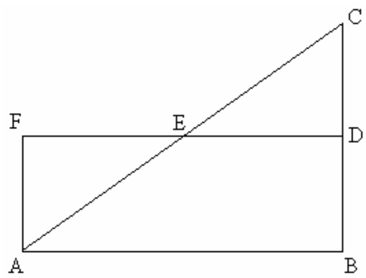
**Uvedieme úryvok zo Základov na príklade klasickej geometrickej evidencie**

Ukážeme, že pravouhlý trojuholník ABC a obdĺžnik ABDF (na obrázku) majú rovnakú veľkosť.

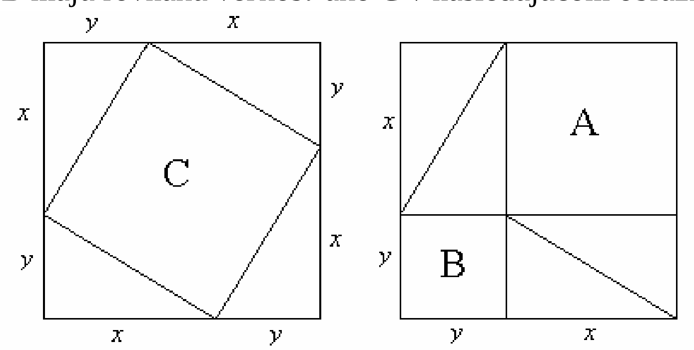
Dĺžka BD je polovičná z dĺžky BC.

Evidujem, že trojuholníky AEF a CED sú zhodné, potom podľa siedmej zásady môžeme evidovať, že majú rovnaký obsah.

V tomto prípade nás druhá zásada upozorňuje na rovnosť geometrických objektov trojuholníka ABC a obdĺžnika ABDF. Preto majú rovnakú veľkosť.



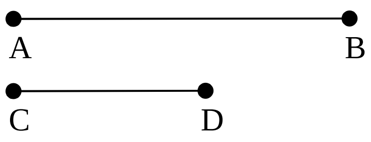

Podobným spôsobom sa dá ukázať, že štvorec A spolu so štvorcom B majú rovnakú veľkosť ako C v nasledujúcom obrázku (Pytagorova veta)



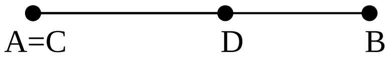

V knihe Základy sa vyskytuje aj **Euklidov algoritmus**, ktorý dnes používame na nájdenie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel. Pôvodný algoritmus, slúžil na zistenie súmerateľnosti dvoch úsečiek, t.j. na nájdenie spoločnej mierky, ktorou sa dajú zmerať dve úsečky.

Príklad :

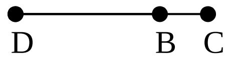
*Nájdite najväčšiu spoločnú mierku dvoch čísel. Čísla budeme reprezentovať úsečkami AB (väčšie číslo) a CD.*



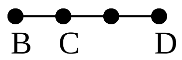
Na úsečku AB nanesieme úsečku CD. Ak nájdeme úsečku, ktorou zmeráme úsečky CD a DB tak nájdeme aj mierku pre úsečku AB a teda úsečky AB a CD sú súmerateľné.




Na úsečku DC nanesieme úsečku DB a podobne hľadáme spoločnú mierku DB a BC. Ak ju nájdeme, tak pomocou nej dokážeme zmerať DC (a teda CD) a aj AB.




Na úsečku BD dokážeme naniesť úsečku BC práve 3-krát. Preto úsečka BD je merateľná úsečkou BC a teda aj úsečka CD je merateľná pomocou BC.




A keďže je merateľná úsečkou BC úsečka DB a CD, potom úsečka AB je merateľná úsečkou BC. A teda veľkosť úsečky BC je spoločnou mierkou úsečiek AB a CD.

To však neplatí pre ľubovoľné dva úsečky. Ide o objav **nesúmerateľnosti** strany a uhlopriečky štvorca. Je to jeden z najpozoruhodnejších objavov antickej matematiky, lebo je základom pre odlíšenie právd rozumu a právd zmyslov. Ľubovoľné dve úsečky nakreslené na papieri sú zrejme súmerateľné, lebo obe predstavujú konečný počet atómov uhlíka, či molekúl iného farbiva. A koniec koncov, každé meranie má hranicu presnosti, existuje určitá minimálna vzdialenosť, od ktorej ak sú dva body k sebe bližšie, už ich nevieme od seba odlíšiť. To ale znamená, že každá nameraná úsečka je celočíselným násobkom tejto minimálnej dĺžky, a teda pomer dĺžok ľubovoľných dvoch skutočných úsečiek je pomerom dvoch celých čísel. Hippasos však objavil, že strana a uhlopriečka štvorca, ak ich chápeme nie ako zmyslové predmety, ale ako matematické objekty, sú nesúmerateľné, pomer ich dĺžok nemožno vyjadriť pomocou pomeru celých čísel.

Už Pytagoras predpokladal, že existujú reálne čísla, ktoré sa nedajú vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel. Až Euklides dokázal, že také čísla existujú, napr. $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.

**Euklidov dôkaz iracionality čísla $\sqrt{2}$ .**

Vychádzal z nasledujúcich vlastností:

1. Ak vynásobíme ľubovoľné celé číslo dvoma, tak dostaneme párne číslo.
2. Ak je druhá mocnina celého čísla párna, tak aj to číslo je párne.
3. Zlomky sa dajú krátiť a upraviť na základný tvar – žiadny zlomok nedá sa krátiť donekonečna.

Prvý raz použil dôkaz sporom – reductio ad absurdum.

Predpokladajme, že číslo $\sqrt{2}$ dokážeme vyjadriť celočíselným zlomkom.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{z toho} \qquad 2*q^2 = p^2$$

teda $p^2$ podľa 1. je párne a podľa 2. aj $p$ je párne a môžeme ho vyjadriť v tvare $p = 2*m$
teda $q^2 = 2*m^2$

z toho podľa 1. a 2., $q$ je párne číslo a teda $q = 2*n$

z toho $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{2m}{2n} = \dfrac{m}{n}$ .

Dostaneme rovnaký, ale jednoduchší zlomok, t.j. číslo je podielom dvoch menších čísel ako $p$ a $q$ a nič nám nebráni pokračovať ďalej a dostávať stále jednoduchší a jednoduchší zlomok – donekonečna. Lenže podľa 3. musí existovať nejaký základný tvar a nemôžeme pokračovať donekonečna, a tu sme dospeli do sporu.

Euklidova idea dôkazu iracionality čísla $\sqrt{2}$ sa využíva v matematike aj dnes. Pojem iracionálneho čísla bol obrovským zlomom v matematike.

A nakoniec uvedieme **Euklidov dôkaz existencie nekonečne veľa pytagorejských trojíc.** Trojicu čísel nazývame pytagorejská, ak súčet prvých dvoch mocnín čísel sa rovná štvorcu tretieho čísla.

Euklides vyšiel z pozorovania, že rozdiel štvorcov dvoch po sebe idúcich celých čísel je vždy nepárne číslo:

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1^2$ | | $2^2$ | | $3^2$ | | $4^2$ | | $5^2$ | | $6^2$ | | $7^2$ | | $8^2$ | |
| | 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | 25 | | 36 | | 49 | | 64 | |
| rozdiel | | 3 | | 5 | | 7 | | 9 | | 11 | | 13 | | 15 | | |

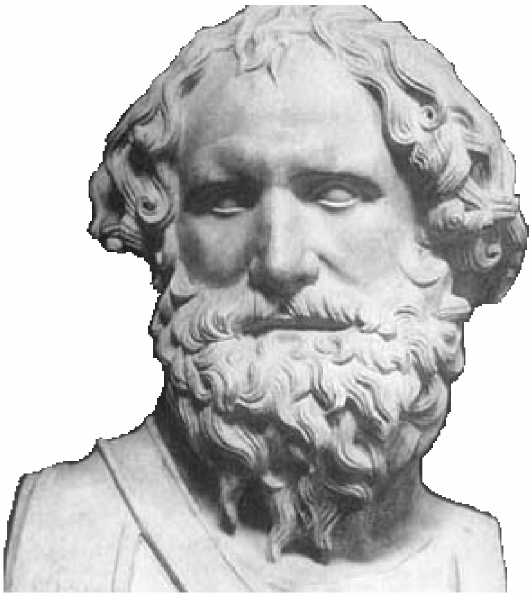
v tomto rade rozdielov sú mocniny nepárnych čísel $3^2$, $5^2$, $7^2$, ... , lebo sa tam nachádzajú všetky nepárne čísla väčšie ako 1.

Všetky pytagorejské trojice ($a$, $b$, $c$) môžeme dostať pomocou ľubovoľných prirodzených čísel $u$, $v$, pričom $u > v$

$$a = u^2 - v^2$$
$$b = 2\,u\,v$$
$$c = u^2 + v^2,$$

lebo $a^2 + b^2 = u^4 - 2\,u^2v^2 + v^4 + 4\,u^2v^2 = \left(u^2 + v^2\right)^2 = c^2$

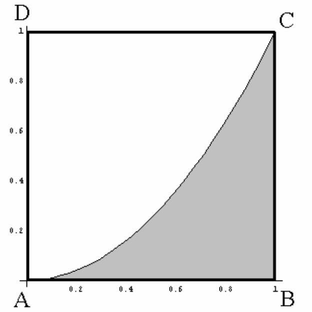
Práve Euklidove práce pravdepodobne inšpirovali geniálneho Gréka a pomohli vyniknúť vynikajúcim myšlienkam nezabudnuteľnej postave gréckeho staroveku ***Archimedovi zo Syrakúz***. Narodil sa v roku 287 B.C. v Syrakúzach v rodine astronóma Phidiasa. Jeho diela a práca v matematike možno veľmi dobre zrekonštruovať priamo z jeho diel, ktoré sa zachovali alebo mnohé časti je možné nájsť ako citácie v dielach iných autorov. Dodnes si zaslúži úctu svojimi matematickými úvahami, konštrukciami, originálnymi metódami a objavmi. V mechanike objavil základné pravidlá o ťažiskách rovinných a priestorových útvaroch, princíp rovnováhy. Jeho najslávnejšia veta o hmotnosti telesa ponoreného do kvapaliny je známa ako Archimedov princíp. V matematike originálnymi metódami vypočítal obvod a plochu kruhu, získal vzorce pre výpočet obsahu veľkosti plochy ohraničenej elipsou, povrchu a objemu valca a gule. Známy je jeho postup pri výpočte kvadratúry paraboly, definovanie špirály, ktorá dodnes nesie jeho meno. Odhadol pomer obvodu kruhu k jeho priemeru, dnes známe ako $\pi$. Zistil, že objemy rovnostranného valca, gule a kúžeľa do tohto valca vpísaných sú v pomere 3 : 2 : 1.



Najznámejšou metódou na výpočet obsahov, ktorú prvýkrát použil Eudoxorus a Archimedovi sa ju podarilo zdokonaliť a originálne využiť je exhautačná metóda. Táto metóda ma veľmi blízko k integrálnemu počtu a práve jej princíp sa používa pri výpočte Danielovho integrálu. Táto metóda je opísaná v knihe *Kvadratúra paraboly*. Uvedieme stručný postup, ktorý doplníme o dôkazy správnosti uvedených tvrdení.

**Kvadratúra paraboly**

Vypočítajte obsah plochy ohraničenej parabolou $x^2$ a $x$-ovou osou od $x$ = 0 po 1.

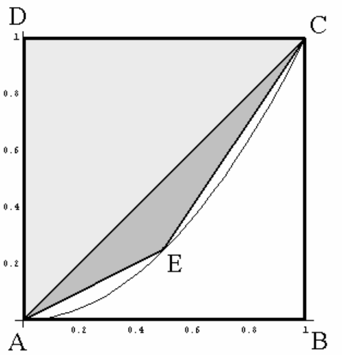



V prípade Archimedovej úlohy to bolo nájsť štvorec s rovnakým obsahom ako obsah útvaru pod parabolou.

Nakreslíme si štvorec ABCD tak, že $|AB| = 1$ a parabolu $x^2$, ktorá má vrchol v bode A a prechádza bodom C.

Úlohou je vypočítať obsah vyšrafovanej plochy ABC. Obsah štvorca je 1 a ak od nej odčítame nevyšrafovanú časť ACD dostaneme veľkosť vyšrafovanej a teda to, čo sme požadovali. Do nevyšrafovanej budeme postupne vpisovať trojuholníky tak, aby sme vyplnili celú plochu.

Umenie Archimeda bolo práve v tom, že veľmi vhodne zvolil vpisované trojuholníky. Prvým vpísaným trojuholníkom bol ACD jeho obsah je $\frac{1}{2}$. Ďalším je trojuholník AEC, pričom bod E je bodom paraboly a veľkosť jeho $x$-ovej súradnice je aritmetickým priemerom veľkosti $x$-ových súradníc bodov A a C.



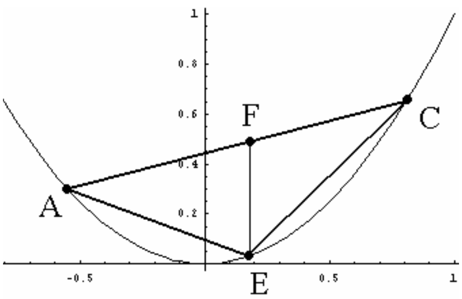

Obsah tohto trojuholníka je $\frac{1}{8}$.

**Tvrdenie** : Ak na parabole $y = x^2$ zvolíme ľubovoľné dva body A = [ $x_1$, $x_1^2$ ], C = [ $x_2$, $x_2^2$ ] a v strede E = $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right]$, tak obsah trojuholníka AEC je $\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^3$

Dôkaz :

Nech bod F je stred úsečky AC, t.j. F = $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right]$

Platí $S_{AEC} = S_{AEF} + S_{ECF}$




Obsah trojuholníka AEF je $\frac{\text{základňá . výška}}{2}$,

t.j. $|EF| \dfrac{\frac{x_1+x_2}{2} - x_1}{2} = |EF| \dfrac{x_2 - x_1}{4}$.

Podobne obsah trojuholníka ECF je $\frac{\text{základňá . výška}}{2}$,

t.j. $|EF| \dfrac{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}{2} = |EF| \dfrac{x_2 - x_1}{4}$.

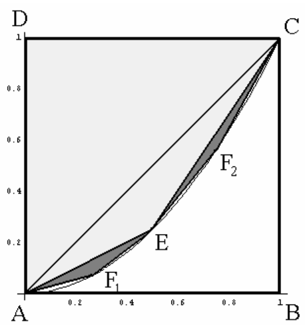
Pričom $|EF|$ je rozdiel v $y$-ových súradniciach bodov E a F.

Teda $|EF| = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{x_2 - x_1}{2}\right)^2$.

Z toho

$$S_{AEC} = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 \frac{x_2 - x_1}{4} + \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 \frac{x_2 - x_1}{4} = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^3 \square$$

Teda obsah vpísaného trojuholníka AEC je $\left(\frac{1-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Ďalšie vpísané trojuholníky zostrojíme obdobným spôsobom. Ďalším je trojuholník $AF_1E$, pričom bod $F_1$, $F_2$ sú body paraboly a veľkosť jeho *x*-ovej súradnice sú aritmetickým priemerom veľkosti *x*-ových súradníc bodov A a E, E a C.




$$S_{AF_1E} = \left(\frac{\frac{1}{2}-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$S_{EF_2C} = \left(\frac{1-\frac{1}{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

Takto môžeme postupovať ďalej. Potom obsah každého z daných trojuholníkov je :

$$\left(\frac{1-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(2^1\right)^3} = \frac{1}{8} \quad \text{je 1 trojuholník}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(2^2\right)^3} = \frac{1}{64} \quad \text{sú 2 trojuholníky}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2^2}-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(2^3\right)^3} \quad \text{sú 4 trojuholníky}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2^3}-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(2^4\right)^3} \quad \text{je 8 trojuholníkov}$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2^n}-0}{2}\right)^3 = \frac{1}{\left(2^{n+1}\right)^3} \quad \text{je } 2^n \text{ trojuholníkov}$$

tak dostaneme postupnosť

$$\frac{1}{2}\,;1\left(\frac{1}{2}\right)^3;\,2\left(\frac{1}{2^2}\right)^3;\,4\left(\frac{1}{2^3}\right)^3;\ldots;\,2^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3;\ldots$$

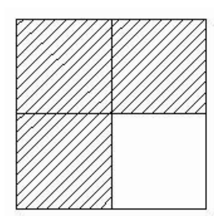
Teda celkový obsah plochy ACD nad parabolou je

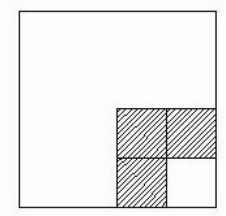
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^4}+\ldots.+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{2n+2}}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$

Vypočítame súčet

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots$$

Nech súčet vyšrafovaných štvorcov je rovný 1.
Obsah každého z nich je rovný 1/3.





Potom zostrojíme podobné, ale s 4-krát menším obsahom.
Ďalej útvar s $4^2$ –krát menším obsahom, atď.

Ak spočítame plochy všetkých štvorcov dostaneme plochu pôvodného celého štvorca, ktorého plocha je $4\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Preto

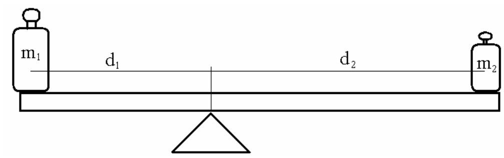
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{4}{3}$$

Z toho celkový obsah plochy nad parabolou

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^3}+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^4}+\ldots.+\frac{1}{2}.\frac{1}{4^{2n+2}}+\ldots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)=\frac{2}{3}$$

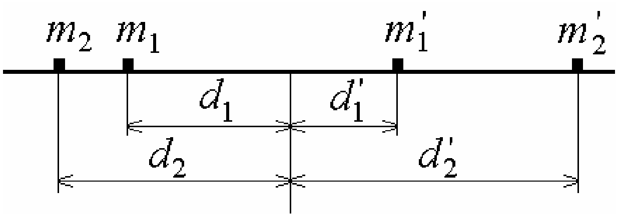
takže obsah pod parabolou je $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Ešte originálnejší spôsob pre výpočet kvadratúry paraboly použil Archimedes v knihe *On plane equilibriums*. V nej použil princíp rovnováhy, t.j. vzťah medzi hmotnosťou a vzdialenosťou. Vyslovil tvrdenie, že dvojramenná váha ostane v rovnováhe, ak súčin hmotnosti a vzdialenosti na oboch stranách je rovnaký.

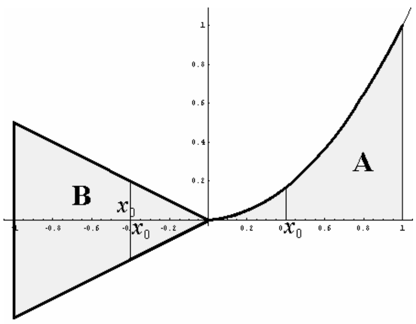



Teda $m_1\, d_1 = m_2\, d_2$.
Vo všeobecnosti

$$\sum_{i=1}^{p} m_i d_i = \sum_{j=1}^{q} m_j' d_j'$$




Týmto spôsobom "vyvážil" rovnoramenný trojuholník a parabolu.




Označme jednotlivé plochy :

$$A=\{(x,y);\,0\le x\le 1;0\le y\le x^2\}$$

$$B=\left\{(x,y);\,-1\le x\le 0;-\frac{x}{2}\le y\le\frac{x}{2}\right\}$$

Plochu v danom prípade budeme interpretovať ako hmotnosť. Pozrime sa na vyváženie v ľubovoľnom bode $x_0$ a $-\ x_0$ , $x_0 \in \langle 0,\ 1\rangle$. Ľavá strana prispieva do momentu vzdialenosť krát výška, t.j. $x_0\ .\ x_0\ =\ x_0^2$. Pravá strana má výšku $x_0^2$. Ku vyváženiu pravej a ľavej strany je potrebné, aby vzdialenosť na pravej strane bola 1. To platí pre ľubovoľný bod $x_0$.

Daný trojuholník má ťažisko v bode T= [ -2/3 , 0 ]. Celkový prínos k momentu $\sum m_i d_i$ trojuholníka je veľkosť jeho plochy krát vzdialenosť od osi otáčania k ťažisku, t.j. $\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Celkový prínos k momentu $\sum m_i^{'} d_i^{'}$ paraboly je veľkosť jej plochy $P$ krát vzdialenosť k 1 t.j. $P\,1 = P$. Keďže sú v rovnováhe teda celkový moment trojuholníka je rovný celkovému momentu paraboly, teda $P = \frac{1}{3}$.


Literatúra :

[1] Znám, Š. a kolektív: *Pohľad do dejín matematiky.*, ALFA Bratislava, 1986,

[2] O'Connor J. J. - Robertson E. F.: *Archimedes of Syracuse*. In : http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Archimedes.html, (12.4.2005)

[3] Gunčaga, J. : *Archimedova kvadratúra paraboly*. In: *III.vedecká konferencia doktorandov*, UKF Nitra, 2002, s. 43-47

[4] Konforovič, A. G.: *Významné matematické úlohy*. SPN Praha, 1989,

[5] Bergren, J. L.: *Encyclopedia 99*. CD Microsoft Encarta, 1999,

[6] Singh, S.: *Velká Fermatova věta*. Academia, Praha 2000.

[7] Beckmann, P.: *Histórie čísla* $\pi$*.* Academia, Praha 1998.