GRÉCKA MATEMATIKA I

FIGURÁLNE ČÍSLA

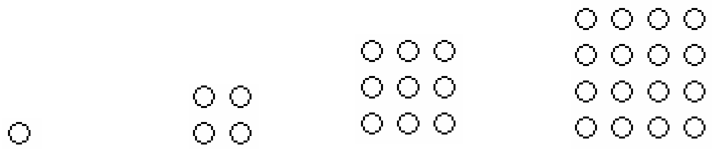
Abstract : Mathematics is of the theory of the symbolic thinking, numeral relations and geometrics forms there are not catchable and that we can understand. Greek mathematicians were first, who began receipt and study the ideal world of mathematical terms, postulates and proofs. The aim of this contribution is to show the way how it is possible simply without using classical numbers, understand the truths as the Pythagoras' Theorem.

Grécka matematika na rozdiel od predchádzajúceho obdobia (keď bola aritmetická - prevažne výpočtová) bola geometrická. Číslami rozumeli tie, ktorým dnes hovoríme prirodzené. Evidenciu rôznych jednotlivých čísel si predstavovali obvykle prostredníctvom nejakých pomocných javov. Nie je totiž jednoduché predstaviť si číslo "tri", je možné si ho však predstaviť prostredníctvom troch kamienkov, alebo troch strán trojuholníka.

Nám však nepôjde o jednotlivé čísla, ale o svet čísel, pomocou ktorých dokážeme nájsť zákonitosti a pravidlá tohto sveta čísel. Nepodarí sa nám nazrieť do tohto sveta priamo, musíme si nájsť taký prostriedok, ktorý nám umožní ako evidovať jednotlivé čísla, tak i nazrieť do ich sveta. Až potom, keď si tieto čísla takto znázorníme môžeme nazerať do ich sveta. Znázorňovanie čísel malo pre rozvoj aritmetiky nemalý význam a práve znázorňovanie prirodzených čísel v geometrickom svete umožnilo využiť geometrického názoru k utváraniu pojmu čísla.

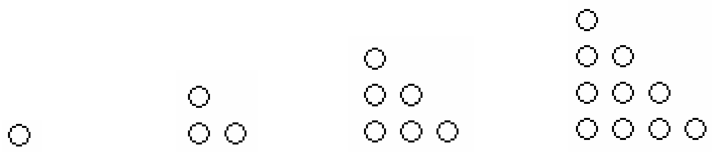
Medzi veľkosťami geometrických objektov sú rôzne číselné vzťahy. Napríklad jedna úsečka môže mať dvojnásobnú, trojnásobnú, ... dĺžku ako iná úsečka. To nám umožňuje rôznymi spôsobmi znázorňovať čísla na geometrických objektoch. Najznámejší z nich boli štvorec a trojuholník. Strany týchto geometrických objektov boli reprezentované kamienkami, teda prirodzenými číslami. Dnes táto interpretácia čísla sa nazýva ***figurálne číslo*.**

Figurálne čísla :



d_1 d_2 d_3 d_4

štvorcové čísla



t_1 t_2 t_3 t_4

trojuholníkové čísla

Nepoznáme problémy, ktoré riešili problémy grécki matematici. Aké pestré úlohy s figurálnymi číslami riešili dnes môžeme len predpokladať. Pravdepodobne sa mohli sa týkať nasledujúcich oblastí:

a) **Vzniku trojuholníkových a štvorcových čísel.**
b) **Súvisu medzi trojuholníkovými a štvorcovými číslami.**
c) **Existencia štvorcových čísel, ktorých súčet je opäť štvorcové číslo** (hľadanie pytagorejských trojíc)
d) **Nájdenie čísla, ktoré je štvorcové a zároveň trojuholníkové.**
e) **Nájdenie trojuholníkového čísla, ktorého dvojnásobok je opäť trojuholníkové číslo.**

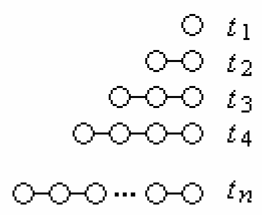
Gréci sa líšili od predchádzajúcich generácií tým, že nepoužívali veľmi matematické symboly - premenné, ale skôr opisné tvary, alebo vety.

Označme si: d_n - n-té štvorcové číslo v poradí (pomocou d_n kamienok dokážeme nájsť štvorec), nazývali dynamis
t_n - n-té trojuholníkové číslo v poradí (pomocou t_n kamienok dokážeme nájsť trojuholník),nazývali trigonis

Všimnime si

a) <u>vznik d_n alebo t_n</u>
"1" považujeme za d_1 alebo t_1.

Ako sme získali trojuholníkové číslo (počet kamienok v trojuholníku, ktoré reprezentujú číslo).



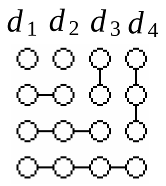
$t_1 = 1$
$t_2 = t_1 + 2$
$t_3 = t_2 + 3$
$t_4 = t_3 + 4$

$t_n = t_{n-1} + n$

$$t_n = t_{n-1} + n = (t_{n-2} + n - 1) + n = (t_{n-3} + n - 2) + n - 2 + n = t_2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n + 1 =$$
$$= t_1 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

Poznámka : v dnešnej terminológií je to aritmetická postupnosť, ktorej súčet vypočítame ako polovica zo súčinu *počet členov* × (*prvý* + *posledný*)

Ako sme dostali štvorcové číslo?



$d_1 = 1$
$d_2 = d_1 + 1 + 2$
$d_3 = d_2 + 2 + 3$
$d_4 = d_3 + 3 + 4$
…….
$d_n = d_{n-1} + n - 1 + n$

$$d_n = d_{n-1} + n - 1 + n = [d_{n-2} + (n-2) + n - 1] + 2n - 1 = [d_{n-3} + (n-3) + (n-2)] + 2n - 3 +$$
$$+ 2n - 1 = ... = d_3 + (3 + 4) + 9 + 11 + ... + 2n - 1 = d_2 + (2 + 3) + 7 + ... + 2n - 1 =$$
$$= 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = \frac{1}{2} n \times 2n = n^2$$

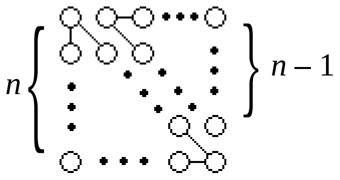
Všimnite si:

V postupnosti štvorcových čísel sa striedajú párne a nepárne čísla d_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

Pri trojuholníkových číslach sa to začína nepárnym a striedajú sa potom 2 párne a 2 nepárne čísla. t_n = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36

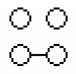
b) **<u>súvis medzi trojuholníkovým a štvorcovým číslom</u>**

Zoberme si d_n. Napríklad:



$d_n = t_n + t_{n-1}$

$d_2 = 4$

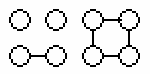


1 + 1 + 2 = 4

d_2 = 4 = 1 + 1 + 2 čo je štvorcové číslo

Skúsme :

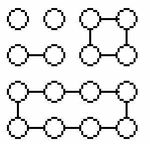
$d_2 + d_2$



1 + 1 + 2 + 4 = 8

$d_2 + d_2$ = 1 + 1 + 2 + 4 = 8 čo už nie je štvorcové číslo

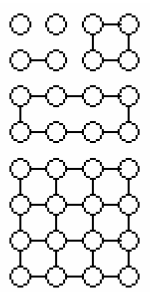
$(d_2 + d_2) + (d_2 + d_2)$



1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16

$(d_2 + d_2) + (d_2 + d_2)$ = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16 čo je už štvorcové číslo d_4

$d_4 + d_4$



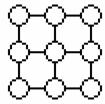
1 + 1 + 2 + 4 = 8

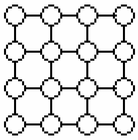
$d_4 + d_4$ = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 čo nie je štvorcové číslo

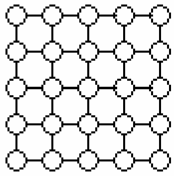
Takýmto ďalším spôsobom dostaneme vzťah: $1 + 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n = 2^{n+1}$. Toto tvrdenie sa dá ľahko dokázať matematickou indukciou.

c) **existencia štvorcových čísel, ktorých súčet je opäť štvorcové číslo** (hľadanie pytagorejských trojíc)

Hľadajme také štvorcové čísla, aby súčet dvoch štvorcových čísel bolo opäť štvorcové číslo.







d_3 d_4 d_5

Ale ide o jediné také alebo existuje ich ešte viacej? Dokážeme k ľubovolnému $k \geq 3$ nájsť dve štvorcové čísla d_m, d_n , že platí $d_k + d_m = d_n$?

Ako vidieť ide o hľadanie pytagorejských trojuholníkov.

Zoberme si tvrdenie: $d_n = d_{n-1} + 2n - 1$. Ak sa podarí dostať, aby $2n - 1$ bolo štvorcovým číslom, tak dostaneme, že súčet štvorcových čísel je opäť štvorcové číslo, lebo d_n je štvorcovým číslom i d_{n-1} je štvorcovým číslom. Keďže $2n - 1$ je nepárne číslo, teda aj štvorec, ktorý vznikne zo štvorcového čísla $2n - 1$, bude mať nepárnu stranu – nech je to $2k+1$, t.j. :

$$(2k + 1)^2 = 2n - 1$$
$$(4k^2 + 4k + 1) + 1 = 2n$$
$$n = 2k^2 + 2k + 1$$

kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

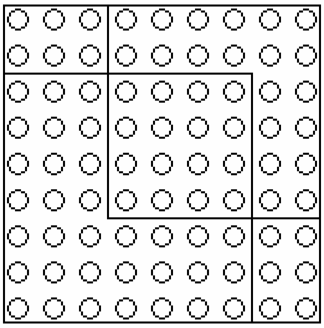
Zo vzorca: $d_n = d_{n-1} + d_{2k+1}$

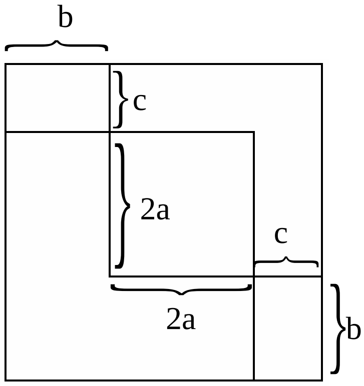
Ak $k = 1$, tak $n = 5$, a teda dostávame $d_5 = d_4 + d_3$

Ak $k = 2$, tak $n = 13$ $d_{13} = d_{12} + d_5$

Teda, pre každé $k \in$ N nájdeme n.

Existuje, ale aj iný spôsob riešenia? Majme dve štvorcové čísla d_{2a+b}, d_{2a+c}. Ich súčet je rovný štvorcovému číslu d_{2a+b+c} práve vtedy, ak platí: $2a*2a = 2bc$, čo vlastne môžeme upraviť na $2a^2 = bc$.





Potom bude platiť $d_{2a+b+c}=d_{2a+b}+d_{2a+c}$. Takto dostaneme všetky pytagorejské čísla.

Príklad :

$b = 2$

$c = 4$

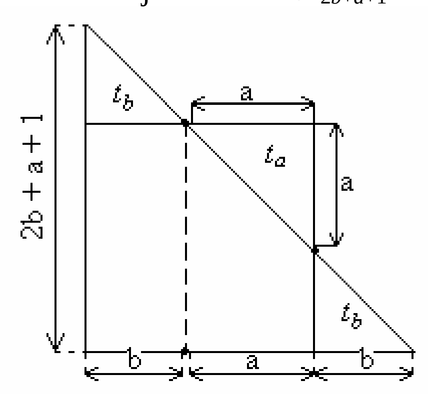
$$a = \sqrt{\frac{bc}{2}} = \sqrt{\frac{2*4}{2}} = 2$$

Po dosadení :

$d_{2*2+2+4}=d_{2*2+2}+d_{2*2+4}$ teda $d_{10} = d_6 + d_8$.

d) existuje číslo, ktoré je štvorcové a zároveň trojuholníkové?
Najmenším takým je číslo d_6 a t_8 v oboch prípadoch 36
Označme

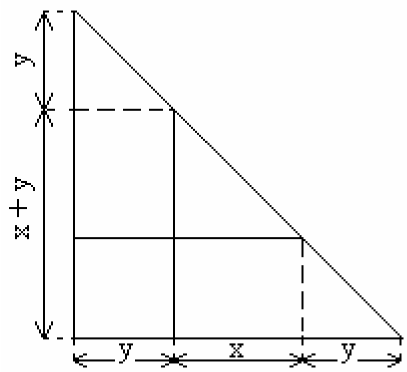
Štvorcové číslo: d_{a+b+1}
Trojuholníkové: t_{2b+a+1}



Tieto čísla sú rovnaké práve vtedy, keď platí $t_a = t_b + t_b$. (Viď obrázok)
A to je zároveň úloha e)
Inými slovami povedané úlohy e) a d) sú navzájom ekvivalentné. Ak nájdeme riešenie e) poznáme riešenie aj d)

e) dá sa nájsť trojuholníkové číslo, ktorého dvojnásobok je opäť trojuholníkové číslo?

Úlohu riešime podobne ako predchádzajúcu. Do veľkého trojuholníka t_{2y+x} vpíšeme dva menšie t_{x+y}, ktoré sa navzájom prekryjú a zároveň vytvoria ten väčší. (Viď obrázok)
Čo vlastne môžeme zapísať: $t_{2y+x} = t_{x+y} + t_{x+y}$. To nastane vtedy, ak z kamienok, ktoré sa prekrývajú, t.j. t_x dokážeme zostrojiť štvorcové číslo d_y. Teda $t_x = d_y$.



Už vieme, že $t_8 = d_6$. Teda našli sme také x, y. A teda po dosadení dostaneme:

$$t_{2*6+8} = t_{8+6} + t_{8+6}$$
$$t_{20} = t_{14} + t_{14}$$

Ak toto riešenie dosadíme do riešenia úlohy v d), tak $a = 20$, $b = 14$
a teda $d_{20+14+1} = d_{35}$
$t_{28+20+1} = t_{49}$
Z čoho vieme, že ďalšími takými číslami, pre ktoré platí, že trojuholníkové je zároveň aj štvorcové je $d_{35} = t_{49}$.

Literatúra :

[1] Znám, Š. a kolektív : Pohľad do dejín matematiky, ALFA Bratislava, 1986,
[2] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/
[3] Konforovič, A. G. : Významné matematické úlohy, SPN Praha, 1989,
[4] Bergren, J. L. : Encyclopedia 99, CD Microsoft Encarta, 1999,
[5] Singh, S. : Velká Fermatova věta, Academia, Praha 2000.
[6] Beckmann, P. : Histórie čísla π, Academia, Praha 1998.