Modifikácie a aplikácia Daganzovej stratédie na riešenie problému okružných jázd

Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae
Vedecké štúdie Pedagogickej fakulty

Katolícka univerzita v Ružomberku
Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a fyziky

Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae
Vedecké štúdie Pedagogickej fakulty

č. 51

Štefan Tkačik

Modifikácie a aplikácia Daganzovej stratégie na riešenie problému okružných jázd

Pedagogická fakulta Katolíckej univerzity v Ružomberku

Ružomberok 2004

Modification and Aplication Daganzo Strategy for solve VRP
by Štefan Tkačik

sadzba
RNDr. Štefan Tkačik

Obálka
Ján Otradovec

Recenzenti
prof. RNDr. Pavol Kluvánek, CSc.
Doc. RNDr. Marián Trenkler, CSc., m. prof. KU
Doc. RNDr. Roman Frič, DrSc.

ISBN 80-89039-91-X
ISSN 1336-2232

Za jazykovú úpravu monografie zodpovedá autor

Edičné stredisko Pedagogickej fakulty, Námestie Andreja Hlinku 56/1, 034 01 Ružomberok
tel/fax 00421-44-4320960; http://fedu.ku.sk

Obsah

Predhovor

Matematický problém, ktorý dnes nazývame problém obchodného cestujúceho (TSP) bola prvýkrát študovaná v roku 1800 írskym matematikom William Rowan Hamilton a britským matematikom Thomasom Penyngtonom Kirkmanom. Precíznejšia matematická formulácia úlohy TSP sa prvýkrát objavila v roku 1930 na univerzitách vo Viedni a Harvarde. K najvýznamnejšiemu posunu v tejto oblasti priniesla výpočtová technika, vďaka ktorej sa úloha stala viac sofistikovanejšou a s netriviálnym zadaním. To umožnilo aj k posunu pri riešení úlohy, keď v roku 1954 sa našlo optimálne riešenie úlohy Dantziga, Fulkersona a Johnsona, problému s 49 mestami až k vyriešeniu úlohy Applegata, Bixbyho, Chvátala a Cooka s 24 978 mestami v roku 2004.

Metód a spôsobov riešenia tohto problému alebo všeobecnejšieho problému, problému okružných jázd (VRP) je veľa a jednou z nich je metóda, ktorá rieši diskrétnu úlohu VRP, resp. TSP metódami spojitej aproximácie, dnes známou Daganzovou stratégiou. Výhodou tejto metódy je, že umožňuje riešiť úlohy veľkých rozmerov pri výpočtovej zložitosti $n \log n$, teda v pomerne krátkom čase. Nevýhodou je, že nepresnosť, ktorá vzniká pri aproximácií môže byť pre niektoré regióny veľká. Táto metóda dosahuje veľmi dobrých výsledkov pre región s rovnomernou hustotou vrcholov.

V tejto práci je upravená Daganzová stratégia tak, aby bola použiteľná v ľubovoľnom regióne. Ukážeme niektoré modifikácie aj spôsob riešenia na dopravnej sieti v regióne Východného Slovenska.

Tento text je doplnená dizertačná práca, ktorá bola napísaná pod vedením doc. Mgr. Martina Fronca, CSc., ktorému chcem srdečne poďakovať za množstvo podnetov a cenných rád vďaka, ktorým som sa mohol o danú problematiku zaujímať od študijného pobytu na Escuela Superior de Ingenieros Universidad de Sevilla v Španielsku u profesora Francisca Garcíu Beníteza. Za neoceniteľnú pomoc, usmerňovanie a množstvo cenných rád by som veľmi rad poďakovať prof. RNDr. Pavlovi Kluvánkovi, CSc..

autor

KAPITOLA 1

Úvod

Jednou z každodenných úloh dopravy je rozvoz tovaru. Rozvoz sa zabezpečuje pomocou určitého počtu áut od výrobcu k spotrebiteľom. Cieľom dispečera, ktorý zabezpečuje rozvoz je zabezpečiť najlacnejší rozvoz (minimalizovať celkovú prejdenú vzdialenosť vozidiel tak, aby bola každá predajňa obslúžená práve raz a práve jedným vozidlom). Pretože zásobovanie je často opakované, aj malé skrátenie celkovej vzdialenosti pri každodennom rozvoze môže výrazne znížiť ročné náklady prepravcu.

Táto úloha minimalizovania dopravných nákladov pri uspokojení požiadaviek zákazníkov v jednotlivých vrcholov je riešená pomocou strategického, taktického a operačného plánovania [2]. Pod strategickým plánovaním chápeme umiestnenie vhodných zariadení (závodov, veľkoskladov, teda diep). Problémy súvisiace s veľkosťou vozového parku, môžeme nazvať ako taktické. A nakoniec operačné plánovanie zahrňuje rozhodnutia týkajúce sa hľadania a rozvrhovania vozidiel, na ktoré sa vo svojej práci zameriavame. Podľa štúdie Kearneyho [23] ťažisko úspor v dopravných nákladoch (tvoriace 16% predajnej hodnoty výrobku) je v zlepšení operačného plánovania. V nich môžeme nájsť tri základné úlohy distribúcie :

- one-to-one distribution, preprava z jedného do druhého vrcholu
- one-to-many distribution, preprava z jedného vrchola – depa k viacerým vrcholom alebo z viacerých vrcholov k jednému
- many-to-many distribution, z viacerých vrcholov diep do viacerých vrcholov.

Ďalej sa budeme zameriavať na one-to-many distribution, ktorú možno rozdeliť na úlohu okružných jázd známu ako Vehicle Routing Problem (VRP) a jej špeciálny prípad, známy ako problém obchodného cestujúceho Traveling Salesman Problem (TSP).

Cieľom práce je navrhnúť zlepšenie stochastickej optimalizačnej metódy riešiacej problém TSP a VRP známej ako Daganzová stratégia. Ide o metódu spojitej aproximácie účelovej funkcie. Pôjde o úpravu tejto metódy s cieľom zlepšiť dolný odhad prejdenej vzdialenosti a celkovú prejdenú vzdialenosť spôsobom :

- nájdenia oblastí v regióne s väčšou hustotou vrcholov pomocou zhlukovej analýzy
- nahradením vzdialeností medzi vrcholmi metrickou vzdialenosťou a vhodným otočením celej dopravnej sieti.

Ďalšou úlohou je aplikovať dané výsledky na dopravnú sieť.

V druhej kapitole je formulovaná úloha okružných trás. Najprv formulujeme matematický model obchodného cestujúceho pre Daganzovú stratégiu. V účelovej funkcii je vzdialenosť náhodnou veličinou medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi. Potom je formulovaný matematický model úlohy okružných jázd.

Tretia kapitola uvádza analýzu riešenia súčasného stavu problematiky. Uvedené je rozdelenie algoritmov na tri skupiny podľa spôsobu riešenia a niektoré známe metódy v každej skupine.

V štvrtej kapitole hľadáme vhodné metódy riešenia problému okružných jázd. Prvá časť tejto kapitoly opisuje metódu zhlukovej analýzy, pomocou ktorej rozdelíme daný región na subregióny, pričom ich počet je možné na základe kritérií upravovať. Druhá časť tejto kapitoly sa venuje o spôsobe hľadania najvhodnejšej transformácie skutočnej vzdialenosti medzi vrcholmi na metrickú vzdialenosť a o vplyve otočenia na dopravnú sieť. V tretej časti pomocou spojitej aproximácie riešime problém obchodného cestujúceho pomocou Daganzovej stratégie.

V piatej kapitole metódy zo 4 kapitoly modifikujeme a doplniame, aby sme ich mohli využiť na riešenie problému okružných jázd.

V poslednej kapitole aplikujeme upravené metódy na riešenie problému obchodného cestujúceho a okružných jázd v dopravnej sieti. V prvej časti riešime úlohu obchodného cestujúceho pomocou Daganzovej stratégie v 208 náhodných dopravných sieťach s rôznym počtom vrcholov. V druhej časti tejto kapitoly riešime problém okružných jázd na dopravnej sieti v regióne východného Slovenska. Najprv rozdelíme daný región na daný počet subregiónov. V každom subregióne nájdeme vhodný uhol otočenia a vhodnú metrickú vzdialenosť medzi vrcholmi a v každom z nich nájdeme cestu obchodného cestujúceho. Daná kapitola obsahuje aj analýzu výsledkov navrhnutých riešení.

KAPITOLA 2

FORMULÁCIA ÚLOHY OKRUŽNÝCH TRÁS

V tejto kapitole definujeme jednu z tried úlohy okružných trás (vzhľadom na ciele tejto práce) v regióne $\mathcal{A}$ s plochou A, kde bude rovnomerne umiestnených N+1 vrcholov (N zákazníkov a depo). Daný región je reprezentovaný hranovoohodnoteným grafom. Úlohu by sme mohli definovať nasledovne : Navštíviť NV vozidlami všetky vrcholy práve raz, pričom trasa každého vozidla začína a končí v depe a celková prejdená vzdialenosť je minimálna. Ak máme iba jedno vozidlo s neobmedzenou kapacitou, ide o problém TSP. Cieľom teda nie je len nájdenie prejdenej minimálnej vzdialenosti, ale aj nájdenie postupnosti vrcholov pre každé vozidlo. Budeme uvažovať, že máme homogénny dopravný park a tiež, že požiadavky zákazníkov sú rovnako veľké. Náklady súvisiace s prechodom z vrcholu i do j sú dané vzdialenosťou medzi týmito dvoma vrcholmi. Vzdialenosť $c_{i,j}(\omega)$ je náhodná veličina medzi ľubovoľnými vrcholmi i, j. Je definovaná pomocou Euklidovskej metriky, nasledovne :

$$c_{i,j}(\omega) = \sqrt{\left(x_i(\omega) - x_j(\omega)\right)^2 + \left(y_i(\omega) - y_j(\omega)\right)^2}\text{, pre } i, j = 0,1, \dots, \text{N} \tag{2.1}$$

kde $\left(x_i(\omega), y_i(\omega)\right)$ sú súradnice umiestnenia i-tého vrcholu v regióne $\mathcal{A}$. Vrchol $\boldsymbol{x}=(x,y)$ v regióne je náhodnou premennou, ktoré má rovnomerné rozdelenie s hustotou $f(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{|\text{A}|}$ a je pre celý región konštantná. Počet vrcholov v nejakom subregióne $\mathcal{R}$ regiónu $\mathcal{A}$ je približne $N \int_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}} f(\boldsymbol{x})dx = N f(x_0)R$, kde x_0 je nejaký bod v $\mathcal{R}$.

2.1 Matematický model úlohy obchodného cestujúceho

Pri formulácií modelu vychádzame z predpokladu, že je známy konečný počet vrcholov a obslužný región $\mathcal{A}$, v ktorom sú definované náklady na prepravu $c_{i,j}$ z vrcholu i do j , pomocou (2.1), pre jednoduchosť predpokladáme, že náklady sú symetrické t.j. $c_{i,j} = c_{j,i}$. Pri použití jedného vozidla neobmedzenej kapacity je problémom nájsť trasu prechádzajúcu všetkými vrcholmi. Trasa začína a končí vo vrchole 0 a celková prejdená vzdialenosť je minimálna.

Označme $z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{trasa prechádza hranou (i, j)} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

Výsledným rozhodnutím je matica Z = ($z_{i,j}$), pre i,j=0, ... , N, ktorá udáva postupnosť vrcholov na trase. Tú získame ako riešenie nasledujúceho matematického modelu :

$$E\left(\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N} c_{i,j}(\omega) z_{i,j}\right) \to \min \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=0}^{N} z_{i,j} = 1 \text{ , pre } j=0, 1, \dots, N \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=0}^{N} z_{i,j} = 1 \text{ , pre } i=0, 1, \dots, N \tag{2.4}$$

$$(z_{i,j}) \in S \text{ , pre } i,j=0, 1, \dots, N \tag{2.5}$$

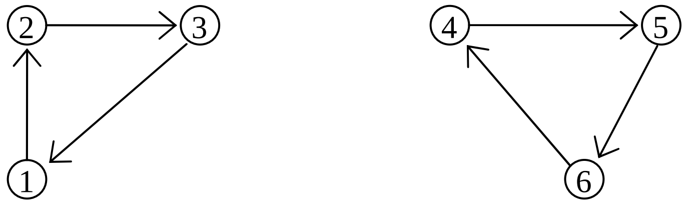
$$z_{i,j} \in \{0,1\} \tag{2.6}$$

Ohraničenie (2.3) znamená, že do j-teho vrcholu sa dostaneme práve z jedného spomedzi vrcholov 0, ..., N. Podobne (2.4), z i-teho vrcholu sa dostaneme len do práve jedného spomedzi vrcholov 0, ..., N. Aby sme zabránili možnosti vzniku viacerých nezávislých trás, pridávame ohraničenie (2.5). Na obrázku 2.1 daná konfigurácia spĺňa ohraničenia (2.2), (2.3), (2.4), (2.6), ale nie (2.5). Množinu S môžeme definovať pomocou jednej z nasledujúcich možností :

(1) S={ $z_{i,j}$: $\sum_{i\in Q}\sum_{j\notin Q} z_{i,j} \geq 1$, pre každú neprázdnu vlastnú podmnožinu Q, množiny všetkých vrcholov}

(2) S={ $z_{i,j}$: $\sum_{i\in R}\sum_{j\in R} z_{i,j} \leq |R| - 1$, pre každú neprázdnu podmnožinu R, množiny {2, 3, 4, …, N}

(3) S={ $z_{i,j}$: $y_i - y_j + N z_{i,j}, \leq N - 1$ pre $2 \leq i \neq j \leq N$, kde y_i je poradie navštíveného vrchola na trase}



Obrázok 2.1.

Prvá podmienka pri definícií množiny S znamená, že každá vlastná podmnožina Q vrcholov musí byť spojená s ostatnými vrcholmi v regióne $\mathcal{A}$, v riešení Z. Tak napríklad na obrázku 2.1 daná podmienka nebude splnená pre Q={1, 2, 3}. Druhá podmienka pri definícií množiny

S znamená, že hrany vybrané v Z neobsahujú kružnicu, t.j. pri vybraní R vrcholov nemôže byť $|R|$ hrán. Tak napríklad na obrázku 2.1 daná podmienka nebude splnená pre R={4, 5, 6}. Tretia podmienka pri definícií množiny S zabezpečuje, aby riešenie Z neobsahovalo ako vlastnú podmnožinu kružnicu, t.j. pri príklade z obrázku 2.1 pre hrany (4,5), (5,6) a (6,4) mala platiť podmienka $3n \leq 3(n-1)$

2.2.Matematický model úlohy okružných jázd

Predchádzajúci model rozšírime o možnosť používania viacerých vozidiel s obmedzenou kapacitou. Ak označíme v_{max} ako kapacitu vozidla a v ako veľkosť požiadavky v ľubovoľnom vrchole, môžeme potom predpokladať $v < v_{max}$. V prípade $v \geq v_{max}$ pošleme len k tomuto vrcholu $\left\lfloor \frac{v}{v_{\max}} \right\rfloor$[1]-krát vozidlo, pričom takto prejdená vzdialenosť nemá vplyv na minimalizáciu celkovej vzdialenosti [10]. Teda maximálny počet zastávok (počet vrcholov obslúžených vozidlom práve na jednej trase) pre jedno vozidlo bude C=$\left\lceil \frac{v_{\max}}{v} \right\rceil$, a počet vozidiel potrebných na obsluhu práve N vrcholov je NV= $\left\lceil \frac{N}{C} \right\rceil$. Úlohou je nájdenie trás prechádzajúcich všetkými vrcholmi. Každá trasa začína a končí vo vrchole 0- depo, počet obslúžených zákazníkov na jednej trase vozidla je najviac C a celková prejdená vzdialenosť je minimálna. Označme

$$z_{i,j}^{v} = \begin{cases} 1 & \text{ak hrana } (i, j) \text{ je na trase } v \text{ - teho vozidla} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Výsledným rozhodnutím je trojrozmerná matica Z = ($z_{i,j}^{v}$), pre i,j=0, ... , N ; v=1, ..., NV, ktorá umožňuje vytvoriť postupnosť vrcholov na trase v-teho vozidla. Potom môžeme zapísať túto úlohu nasledujúcim matematickým modelom :

$$\mathrm{E}\left(\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=0}^{N}\sum_{v=1}^{NV} c_{i,j}(\omega) z_{i,j}^{v}\right) \to \min \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{v=1}^{NV} z_{i,j}^{v} = 1 \text{ , pre } i=1, 2, \ldots ,N \tag{2.8}$$

[1] Pod označením $\lfloor x \rfloor$ budeme rozumieť najväčšie celé číslo menšie alebo rovnajúce sa x a pod $\lceil x \rceil$ najmenšie celé číslo väčšie alebo rovnajúce sa x .

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{v=1}^{NV} z_{i,j}^{v} = 1 \text{ , pre } j=1, 2, \dots ,N \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=0}^{N} z_{i,p}^{v} = \sum_{j=0}^{N} z_{p,j}^{v} \text{ , pre } v=1, 2, \dots , NV \text{ a pre } p=0, 1, \dots ,N \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} z_{i,j}^{v} \leq C \text{ , pre } v=1, 2, \dots , NV \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=1}^{N} z_{0,j}^{v} \leq 1 \text{, pre } v=1, 2, \dots , NV \tag{2.12}$$

$$\sum_{i=1}^{N} z_{i,0}^{v} \leq 1 \text{, pre } v=1, 2, \dots , NV \tag{2.13}$$

$$(z_{i,j}^{v}) \in S \text{ , pre } i,j=0, 1, \dots , N \tag{2.14}$$

$$z_{i,j}^{v} \in \{0, 1\} \tag{2.15}$$

Pomocou minimalizácie účelovej funkcie (2.7) dosiahneme minimálnu prejdenú vzdialenosť. Rovnica (2.8) a (2.9) nám zabezpečí, aby každá požiadavka vo vrchole bola uspokojená práve jedným vozidlom. Súvislosť každej z trás je reprezentovaná rovnicou (2.10), t.j. ak vozidlo vstúpi do vrcholu, tak musí z neho aj vystúpiť. Nerovnica (2.11) zabezpečí neprekročenie kapacity vozidla. Nerovnice (2.12) a (2.13) garantujú, že každé vozidlo je použité najviac raz. Vznik viacerých nezávislých trás pre ľubovoľné vozidlo v=1, ..., NV dosiahneme pridaním ohraničenia (2.14), s takto definovanou množinou S :

(1) S={ $z_{i,j}^{v}$: $\sum_{i\in Q}\sum_{j\notin Q} z_{i,j}^{v} \geq 1$, pre každú neprázdnu vlastnú podmnožinu Q, množiny všetkých vrcholov, ktoré budú navštívené v-tým vozidlom }

(2) S={ $z_{i,j}^{v}$: $\sum_{i\in R}\sum_{j\in R} z_{i,j}^{v} \leq |R| - 1$, pre každú neprázdnu podmnožinu R, množiny {2, 3, 4, …, N}

(3) S={ $z_{i,j}^{v}$: $y_i - y_j + N\ z_{i,j}^{v} \leq N - 1$ pre $2 \leq i \neq j \leq N$, kde y_i je poradie navštíveného vrchola na trase}

Prvá podmienka pri definícií množiny S znamená, že každá vlastná podmnožina Q vrcholov, ktorá je obslúžená jedným vozidlom musí byť spojená s ostatnými vrcholmi ta tej okružnej jazde v regióne $\mathcal{A}$, v riešení Z. Druhá podmienka pri definícií množiny S znamená, že hrany vybrané pri obslužnej jazde jedným vozidlom v Z neobsahujú kružnicu, t.j. pri vybraní R vrcholov nemôže byť $|R|$ hrán. Tretia podmienka pri definícií množiny S zabezpečuje, aby riešenie Z pri okružnej jazde pre jedno vozidlo neobsahovalo ako vlastnú podmnožinu kružnicu.

KAPITOLA 3

METÓDY RIEŠENIA ÚLOHY

Matematickým problémom vzťahujúcim sa na riešenie problému obchodného cestujúceho sa zaoberali v roku 1800 írsky matematik William Rowan Hamilton a britský matematik Thomas Penyngton Kirkman. Všeobecný vzťah pre TSP sa objavuje prvykrát v štúdiach matematikov po roku 1930 na univerzitách vo Viedni a Harvarde. Aj napriek tomu sú spôsoby riešenia úlohy okružných trás s rešpektovaním rôznych obmedzení neustále v centre pozornosti vedeckých pracovníkov. Ich snahou je nájsť efektívne algoritmy, ktorých výsledkom bude riešenie blízke optimálnemu, pri menej rozsiahlych úlohách optimálne riešenie. Keďže už problém obchodného cestujúceho je NP-úplný, t.j. nie je známa existencia polynomiálneho algoritmu, znamená to, že vzrastajúcim počtom vrcholov vzrastá čas riešenia exponenciálne. Algoritmy používané na riešenie úlohy okružných jázd môžeme rozdeliť na :

1. heuristické algoritmy
2. exaktné algoritmy
3. suboptimálne algoritmy

Prvá časť tejto kapitoly je venovaná niekoľkým prístupom použitých na riešenie danej úlohy a výsledkom dosiahnutých týmito prístupmi. Ďalšie časti sú venované témam, ktoré využijeme pri riešení úlohy okružných jázd.

3.1 Heuristické algoritmy

Pod pojmom heuristický algoritmus [38] rozumieme postup, ktorý nám nezaručuje vyriešenie každého príkladu problému. Dáva nám spravidla síce prípustné riešenie, ale nie vždy optimálne. V súčasnosti existuje množstvo heuristických algoritmov. Použijeme nasledujúce rozčlenenie podľa spôsobu riešenia [2] :

- **Cluster first-route second**, ide o metódu, ktorá rozdelí najprv vrcholy do určitých zhlukov-clusterov, až potom v druhom kroku utvorí ekonomickú cestu v jednotlivých clusteroch - problém obchodného cestujúceho. Príklady týchto myšlienok sú použité v [16], [15], [4], [22]. Používa sa štandartne v probléme VRP s jedným depom. Známym algoritmom v tejto skupine je zametací algoritmus (sweep).
- **Route first- cluster second**, ide o metódu pracujúcu v opačnom poradí ako predchádzajúca. V prvej fáze je snahou vytvoriť jednu trasu prechádzajúcu všetkými vrcholmi bez ohľadu na kapacitné obmedzenia vozidiel vozového parku. Takúto trasu

môžeme získať napr. riešením problému obchodného cestujúceho. Takéto riešenie je neprípustné, ak vozový park obsahuje aspoň 2 vozidla. Preto je táto veľká trasa rozdelená na menšie tak, aby boli splnené kapacitné obmedzenia vozidiel. Táto metóda sa používa štandartne pri heterogénnom dopravnom parku. Algoritmy riešiace tento problém môžeme nájsť v [17], [35], [1].

- **Savings (napríklad Clark & Wright)**, v každom kroku tejto metódy je jedna dvojica trás zamenená za inú (kratšiu) trasu. Inicializačná množina je tá, ktorá obsahuje len také trasy, že ku každému vrcholu sa dostaneme práve jedným vozidlom. Postupne zlučujeme vrcholy do jednej trasy a to práve tie, pri ktorých dochádza k maximalizácii úspor, pričom dodržujeme kapacitné obmedzenia vozidiel. Príklady metódy úspor môžeme nájsť v [8], [18], [36].
- **Improvement, exchange**, je tiež známa ako metóda zlepšujúcich zmien, rozpracovaná [28], [29], [5]. Dodržujúc prípustné riešenie sa snažíme smerovať k optimálnemu riešeniu nasledovným spôsobom. V každom kroku jedno prípustné riešenie je pozmenené iným prípustným riešením s nižšími celkovými nákladmi. To opakujeme, pokiaľ je takáto výmena možná. K známym algoritmom využívajúcim túto metódu patrí Lin & Kernighanov algoritmus.
- **Mathematical programming approaches**, zahŕňa algoritmy založené na formulácii routing problému pomocou matematického programovania (MP). Excelentný príklad MP algoritmu podáva Fisher a Jaikumar [12]. V tomto algoritme pretransformovali problém VRP na všeobecný priraďovací (pokrývací) problém a problém obchodného cestujúceho. Ide o to, že každý zákazník je priradený práve jednému vozidlu tak, aby nebola presiahnutá kapacita vozidla. A potom pre každé vozidlo sa rieši problém obchodného cestujúceho. Táto metóda je rozpracovaná v [25].

3.2 Exaktné algoritmy

- **Method branch and bound**, zahŕňa algoritmy založené na postupnom vytvorení súboru, ktorého prvky tvoria podmnožinu prípustných riešení. Tento súbor sa nazýva strom vetvenia a je vytvorený pomocou výberu alebo zákazu hrán. Hrany sú z množiny hrán a sú z nich tvorené čiastočne fixné prípustné trasy. Každému vetveniu je na základe použitej metódy (metóda generovania stĺpcov, aditívneho prístupu, metóda úplného b-párovania) priradená dolná hodnota. Na základe tejto dolnej hranice účelovej funkcie sa rozhodneme pre zvolenú vetvu stromu alebo ju zamietneme. Zamietneme ju v prípade, že hodnota účelovej funkcie už nájdeného riešenia je menšia ako dolna hranica účelovej funkcie už spracovanej vetvy. Po konečnom počte vetvení dosiahneme optimálne riešenie. Čas pre použitie všetkých možností je exponenciálny, tzn. že pre väčší počet vrcholov v reálnom čase sa nemusí dosiahnuť optimálne riešenie. Príklady metódy môžeme nájsť v [6], [20], [33].

- **Method Simulated Annealing (SA)**, patrí do triedy pravdepodobnostných algoritmov nazývaných metaheuristiky, s cieľom priblížiť sa ku globálnemu optimu. SA môže byť opísaný ako proces, ktorý " ... najprv 'roztopí' optimalizovaný systém na najefektívnejšiu 'teplotu', potom sa pomaly znižuje 'teplota' v stavoch pokiaľ systém 'nezmrzne', t.j. nemôže už nastať žiadna zmena." SA algoritmus generuje nové konfigurácie s určitými pravdepodobnostnými pravidlami, a či ich príjme alebo odmietne, závisí na ich relatívnych nákladoch. Ak náklady novej konfigurácie sú nižšie ako náklady predchádzajúcej, potom je prijatá s pravdepodobnosťou jedna, ináč s pravdepodobnosťou závislou na nákladoch obidvoch konfigurácií a predchádzajúcej teploty. Niekedy sa môže prijať aj konfigurácia, v ktorej vzrastú náklady, o jej realizácií sa rozhodne na základe náhodného experimentu, napr. metódou Monte Carlo. Pre túto konfiguráciu sa rozhodneme ak pravdepodobnosť prijatia je väčšia ako zamietnutia. Dá sa ukázať [26], [34], že generovanie, akceptácia a zmena hodnoty funkcie pomocou algoritmu SA konverguje podľa pravdepodobnosti ku konfigurácii, ktorá má minimálne náklady.

3.3 Suboptimálne algoritmy

Táto skupina sa tiež nazýva aproximatívne algoritmy. Na rozdiel od heuristík, vieme určiť chybu riešenia (rozdiel od optimálneho riešenia). Ide o algoritmy riešiace problém obchodného cestujúceho:

- **Minimal spanning tree approach**, algoritmus odvodil Kim [24]. Najprv nájdeme najlacnejšiu kostru. Zdvojením hrán v minimálnej kostre získame Eulerovský sled. Ten pretransformujeme na kružnicu. Takto dosiahnuté riešenie nie je horšie, ako dvojnásobok optimálneho riešenia.
- **Christofides method** [7], vychádza z nájdenia minimálnej kostry. Vyberieme všetky vrcholy nepárneho stupňa. Medzi nimi nájdeme najlacnejšie úplne párenie, ktoré pridáme ku minimálnej kostre. Takto získame kružnicu, ktorej horný odhad účelovej funkcie je 1,5 násobok dosiahnutý v optimálnom riešení.
- **Continuity aproximation method (CA)** [40], ide o metódu využívajúcu spojitú aproximáciu účelovej funkcie. Nevyhnutnými predpokladmi pre použitie tejto metódy je rovnomerné rozloženie vrcholov v regióne $\mathcal{A}$ a platnosť Euklidovskej metriky pre

vzdialenosť 2 vrcholov. Cieľom je nájsť jednoduchú formulu pre celkové náklady, v závislosti od počtu vrcholov N a hustoty rozmiestnenia vrcholov δ. Obslužný región $\mathcal{A}$ sa snažíme rozdeliť do pruhov šírky w. Jednoduchou implementáciou potom nájdeme cestu pre obchodného cestujúceho. Pri riešení problému okružných jázd sa snažíme určiť tvar a plochu subregiónu pre obsluhu jedného vozidla, a na ňom vyriešiť problém obchodného cestujúceho.

KAPITOLA 4

VÝBER VHODNEJ METÓDY RIEŠENIA.

Práca je venovaná problému okružných jázd. Problém patrí do skupiny optimalizačných problémov. Budeme ho riešiť následovným spôsobom:

Daný región rozdelíme na subregióny metódou zhlukovej analýzy. Na jednotlivých subregiónoch nájdeme pomocou metód spojitej aproximácie dĺžky cesty obchodného cestujúceho v l_p norme (takzvaná Daganzová stratégia odvodená pre l_2 metriku) pre cestu obchodného cestujúceho. Vzhľadom na to, že budeme požadovať, aby vzdialenosti medzi vrcholmi boli metrické (t.j. aby vzdialenosť ľubovoľných dvoch vrcholov $X=(x_1,y_1)$, $Y=(x_2,y_2)$ bola v p-metrike $l_p(X,Y)=\sqrt[p]{(x_1-y_1)^p+(x_2-y_2)^p}$), potrebujeme transformovať skutočné vzdialenosti na metrické.

Postupne si rozoberieme jednotlivé metódy a ich použitie.

- Zhluková analýza.

Cieľom je rozdeliť daný región na subregióny, pričom môžeme vopred určiť počet subregiónov (napr. máme daný počet vozidiel, ktorými zabezpečujeme obsluhu regiónu) alebo počet subregiónov, resp. zhlukov môžeme prispôsobiť vopred zadaným kritériám (napr. miera separácie zhlukov, homogenita rozloženia vrcholov vnútri zhluku), a teda počet zhlukov sa môže meniť.

- Spojitá aproximácia dĺžky obchodného cestujúceho v l_2 metrike (Daganzová stratégia)

Ide o metódu, ktorá pomocou hustoty vrcholov v danom regióne navrhne cestu pre obchodného cestujúceho a vypočíta pre túto cestu predpokladanú dĺžku. Predpokladmi na riešenie pomocou tejto stratégie sú :

- rovnomerné rozloženie vrcholov v regióne,
- pre vzdialenosti ľubovoľných 2 vrcholov sa vyžaduje platnosť Euklidovskej metriky.

Práve kvôli týmto predpokladom sa snažíme upraviť a prispôsobiť reálnu situáciu, aby sme ju mohli riešiť pomocou tejto stratégie.

Prvý predpoklad „rovnomerné rozloženie vrcholov v regióne“, v danom regióne je možné vyriešiť metódami zhlukovej analýzy. V nájdených zhlukov, v ktorých rozloženie vrcholov je bližšie k rovnomernému ako pri celom regióne použijeme Daganzovú stratégiu.

Druhý predpoklad „pre vzdialenosti ľubovoľných 2 vrcholov sa vyžaduje platnosť Euklidovskej metriky“ sa snažíme modifikovať úpravou skutočnej vzdialenosti na l_p normu.

Potom upravíme Daganzovú stratégiu, v ktorej navrhneme cestu pre obchodného cestujúceho a navrhneme nový vzorec pre aproximáciu dĺžky cesty obchodného cestujúceho. V tomto prípade sa budeme snažiť nahradiť skutočnú vzdialenosť medzi vrcholmi *p*-metrikou pomocou vhodne zadaného kritéria.

Preto na riešenie daného optimalizačného problému budeme využívať :

- zhlukovú analýzu,
- transformáciu skutočnej vzdialenosti na l_p normu,
- spojitú aproximáciu dĺžky cesty obchodného cestujúceho v l_2 norme,

tieto priblížime v ďalšej časti.

4.1 Zhluková analýza

Veľké množstvo zhlukovacích metód, ktoré sa vyskytujú v literatúre, využíva zhlukovú analýzu ako prostriedok k získaniu klasifikácie a jednotlivé metódy sa líšia podľa cieľov, ku ktorým smerujú. My sa budeme snažiť dané metódy zhlukovej analýzy, ktoré sa využívajú v biometrii, paleobiológii, prispôsobiť na riešenie problému okružných jázd. Najznámejšie je rozlíšenie na hierarchické a nehierarchické metódy zhlukovej analýzy [32].

Hierarchickým sa nazýva systém navzájom rôznych neprázdnych podmnožín množiny *O*, v ktorej prienikom každých dvoch podmnožín je alebo jedna z nich, alebo prázdna množina a v tom systéme existuje aspoň jedna dvojica podmnožín, kde ich prienikom je jedna z nich. Hierarchické zhlukovanie má spravidla charakter postupnosti rozkladov množiny objektov, kde každý rozklad je zjemnením rozkladu nasledujúceho.

Nehierarchickým zhlukovaním nazývame systém navzájom rôznych neprázdnych podmnožín množiny O, v ktorom prienikom každých dvoch podmnožín nie je žiadna z nich. Je zrejmé, že rozklad množiny objektov na podmnožiny, ktoré sú navzájom disjunktné, najlepšie je reprezentované nehierarchickým zhlukovaním. Pri hierarchickom zhlukovaní by muselo existovať niektoré vozidlo, ktorého trasa by bola vlastná podmnožina trasy iného vozidla. Inými slovami by sme obslužili niektoré vrcholy dvoma vozidlami.

Keďže našou úlohou je hľadanie optimálneho rozkladu množiny vrcholov v regióne na disjunktné podmnožiny, budeme sa ďalej zaoberať len nehierarchickým zhlukovaním. Ak hľadáme optimálny rozklad množiny objektov, musíme najprv stanoviť, v akom zmysle má byť tento rozklad optimálny. To určuje tzv. funkcionál kvality rozkladu definovaný na množine všetkých možných rozkladov množiny objektov.

Kritériom kvality rozkladu môže byť :

- vzájomná podobnosť objektov vo vnútri zhluku,