Studia Matematyczne Akademii Świętokrzyskiej tom 9
Kielce 2002

Ján Gunčaga
Katolicki Uniwersytet w Ružomberku

EKSPERYMENT Z CIĄGAMI W GIMNAZJUM

Dział tematyczny „Ciągi i szeregi" jest na Słowacji obecnie realizowany w 4 klasie gimnazjum[1]. We wrześniu 2000 roku prowadziłem badania w Katolickim Gimnazjum św. Andrzeja w Ružomberku. Zajmowałem się wprowadzaniem w klasie czwartej symboli Σ i Π. Chciałem sprawdzić, jak uczniowie będą reagować na użycie tych symboli. Inspiracją dla mnie były zadania z rękopisów profesora I. Kluvánka (1991).

W artykule opisuję, w jaki sposób zapoznałem uczniów z tymi symbolami. Warto dodać, że jest to fragment prowadzonych przeze mnie badań poświęconych nauczaniu w szkole pojęć analizy matematycznej.

Sumę wyrazów ciągu wprowadziłem na następującym przykładzie:

Przykład 1.

Pewien człowiek przed swoją śmiercią wyraził życzenie: Mojemu jedynemu synowi po mojej śmierci niech będzie wypłacona pierwszego dnia połowa moich pieniędzy, drugiego dnia szósta część, trzeciego dnia dwunasta część, czwartego dnia dwudziesta część, ... Czy po śmierci tego człowieka pieniądze będą wypłacane przez rok? Ile trzeba będzie wypłacić w 150. dniu?

Rozwiązanie

Części pieniędzy tworzą wyrazy następującego ciągu:

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots, \frac{1}{n\cdot (n+1)}, \ldots$$

co uczniowie dość łatwo dostrzegli. Stąd wywnioskowali, że 150. dnia trzeba wypłacić z pieniędzy następującą część:

$$\frac{1}{150\cdot 151} = \frac{1}{22650}.$$

[1] Czwarta klasa słowackiego gimnazjum odpowiada ostatniej klasie polskiego liceum.

Dość łatwo zauważyli też, że abyśmy mogli stwierdzić, czy pieniądze będą mogły być wypłacane przez cały rok, musimy znaleźć wartość sumy:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{365\cdot 366}.$$

Tę sumę tworzą wyrazy ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $a_n=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Tu pojawiło się moje stwierdzenie, że oznaczyć to możemy następująco:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{365\cdot 366}=\sum_{n=1}^{365}a_n=\sum_{n=1}^{365}\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Następnie obliczaliśmy sumę kilku pierwszych wyrazów ciągu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}.$$

Postaci tych sum zasugerowały hipotezę, że:

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{p}{p+1}.$$

Wykazaliśmy ją za pomocą indukcji matematycznej. Istotnym momentem było przekształcanie sumy:

$$\sum_{n=1}^{k+1}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

Hipoteza zatem jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej p. Dla $p = 365$ dostajemy:

$$\sum_{n=1}^{365}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{365}{366}<1.$$

Wynika stąd, że pieniędzy wystarczy na wypłaty przynajmniej na rok.

W tym przykładzie użyliśmy sumy wyrazów konkretnego ciągu. Podobnie można definiować iloczyn wyrazów ciągu. Te obserwacje uogólniliśmy następująco:

Definicja

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Niech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *będzie ciągiem o wyrazach ze zbioru liczb rzeczywistych. N-tą sumą cząstkową ciągu* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *nazywamy n-ty wyraz ciągu* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, *gdzie:*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

N-tym iloczynem ciągu $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *nazywamy n-ty wyraz ciągu* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, *gdzie:*

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

Później uczniowie rozwiązali poniższe przykłady, w których ćwiczyli użycie symboli Σ i Π:

(a) $\sum_{i=1}^{3}(i+3)$ (b) $\sum_{i=1}^{4}(2i-1)$ (c) $\prod_{j=5}^{8}(-1)^j \cdot (2j+3)$ (d) $\prod_{j=1}^{3}(2j-1)\cdot 2j$.

Przykład 1 pokazywał jak można za pomocą indukcji matematycznej wprowadzić ogólny wzór dla sumy pierwszych n wyrazów pewnego ciągu. Następne zadanie pokazuje, że tę samą metodę można zastosować dla iloczynu.

Przykład 2.

Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Znajdźcie ogólny wzór dla następującego iloczynu:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{i+1} .$$

Rozwiązanie

Najpierw znaleźliśmy wartość iloczynu dla n = 1, 2, 3, 4, 5:

$$\prod_{i=1}^{1} \frac{2i}{i+1} = \frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1 ,$$

$$\prod_{i=1}^{2} \frac{2i}{i+1} = \left(\frac{2 \cdot 1}{1+1}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{2+1}\right) = \frac{4}{3} ,$$

$$\prod_{i=1}^{3} \frac{2i}{i+1} = \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{4} = \frac{8}{4} ,$$

$$\prod_{i=1}^{4}\frac{2i}{i+1}=\left(\prod_{i=1}^{3}\frac{2i}{i+1}\right)\cdot\frac{8}{5}=\frac{8}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{16}{5},$$

$$\prod_{i=1}^{5}\frac{2i}{i+1}=\left(\prod_{i=1}^{4}\frac{2i}{i+1}\right)\cdot\frac{10}{6}=\frac{16}{5}\cdot\frac{10}{6}=\frac{32}{6}.$$

Następnie zauważyliśmy, że ciąg iloczynów $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ mógłby wyglądać następująco:

$$\frac{2}{2},\frac{4}{3},\frac{8}{4},\frac{16}{5},\frac{32}{6},\frac{64}{7},\frac{128}{8},...$$

co doprowadziło do hipotezy, że $P_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{2i}{i+1}=\frac{2^n}{n+1}$. Dowód za pomocą indukcji matematycznej nie jest oczywiście trudny. Równie prosto wykazaliśmy, że $\forall n\in N; \prod_{i=1}^{n} i=n!$

Podobnymi zadaniami jak przykłady 1 i 2 są następujące:

1. Obliczcie najpierw dla n = 1, 2, 3, 4, 5:

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ (b) $\prod_{j=1}^{n}(2j-1)\cdot 2j$ (c) $\prod_{k=1}^{n}2k\cdot(2k+1)$.

Później zaproponujcie ogólny wzór i wykażcie go dla każdej liczby naturalnej n.

2. Wykażcie, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi:

(a) $\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)\,!}=1-\frac{1}{(n+1)\,!}$ (b) $\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2j)^2}\right)=\frac{2n+1}{4n}$

(c) $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\leq n^n$.

Dalszymi zadaniami, które użyłem dla ćwiczenia indukcji matematycznej były zadania typu: Wykażcie, że...

Przykład 3.

Wykażcie, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(j+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}.$$

Rozwiązanie

Oczywiście najpierw sprawdzaliśmy wzór dla $n = 1$ następująco:

$$L' = \prod_{j=1}^{1}\left(1-\frac{1}{(j+1)^2}\right) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad P = \frac{1+2}{2\cdot 1+2} = \frac{3}{4} \Rightarrow L' = P$$

Następnie przyjmując, że spełnione jest założenie indukcyjne

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{(j+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2k+2}$$

wykazaliśmy, że wzór jest prawdziwy dla $n = k + 1$:

$$\prod_{j=1}^{k+1}\left(1-\frac{1}{(j+1)^2}\right) = \left(\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{(j+1)^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right) =$$

$$= \frac{k+2}{2k+2}\cdot\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2} = \frac{k+2}{2\cdot(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{k+3}{2k+4}.$$

Stąd wywnioskowaliśmy prawdziwość wzoru dla każdej liczby naturalnej.

Eksperyment w gimnazjum był zakończony następującą krótką pracą pisemną:

1. Obliczcie:

A: (a) $\sum_{i=2}^{5}(k^2+1)$ (b) $\prod_{j=3}^{6}\frac{j}{j+1}$

B: (a) $\sum_{i=1}^{4}(k^3-1)$ (b) $\prod_{j=2}^{5}(-1)^j(j-1)$

2. Wykażcie, że dla wszystkich liczb naturalnych zachodzi:

A: $\prod_{i=1}^{n}\frac{2i}{i+1} = \frac{2^n}{n+1}$ B: $\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(i+1)\,!} = 1-\frac{1}{(n+1)\,!}$

Częstym błędem popełnianym przez uczniów w zadaniu pierwszym było to, że w sumach i iloczynach obliczali oni tylko ostatni wyraz. Tak było u sześciu uczniów (22,2%). Całe zadanie uczniowie rozwiązali stosunkowo dobrze, zadanie poprawnie rozwiązało dwunastu uczniów (44,4%). Więcej problemów było z zadaniem drugim, które w całości poprawnie rozwiązało tylko dwóch uczniów (7,4%). Najczęściej uczniowie nie radzili sobie z dowodem implikacji:

$\varphi(k) \Rightarrow \varphi(k+1)$, co pojawiło się u dziesięciu uczniów (37%).

Praca pisemna była przeprowadzana w klasie maturalnej, w której tylko pięcioro uczniów planowało zdawać maturę z matematyki. Pomimo tego wyniki ogólne z prac – w porównaniu z innymi sprawdzianymi pisemnymi – były średnie, co przy niestandardowości materiału można uznać za sukces.

Literatura

HECHT T. (2000) *Matematika pre 4. ročník gymnázia a SOŠ – Postupnosti*, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava.

HEJNÝ M. (1990) *Teória vyučovania matematiky*, SPN, Bratislava.

KLUVÁNEK I. (1991) *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet skriptá*, VŠDS, Žilina.

ODVÁRKO O. a kol. (1985) *Matematika pre 2. ročník gymnázia*, SPN, Bratislava.