Metóda generovaných problémov $f(x) = f^{-1}(x)$

Nech f je lineárna funkcia $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Potom f^{-1}:
$x = ay + b$. Odtiaľ
$x - b = ay$
$\frac{x-b}{a} = y$
Rovnica $f(x) = f^{-1}(x)$ má tvar

$$ax + b = \frac{x-b}{a}. \tag{1}$$

Odkiaľ

$$\begin{aligned} x - b &= a^2x + ab \\ x(1-a^2) &= ab + b \end{aligned}$$

Lineárna funkcia $f(x) = f^{-1}(x)$

Ak $a = 1$, tak $0 = 2b$. Ak $b = 0$, riešením sú všetky reálne čísla. Ak $b \neq 0$, tak rovnica (1) nemá riešenie. Ak $a = -1$, tak máme $0 = 0$. Pre všetky b, riešením (1) sú všetky reálne čísla.
Ak $a \neq 1$ a súčasne $a \neq -1$ dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{b(a+1)}{1-a^2} \\ x &= \frac{b(a+1)}{(1-a)(1+a)} \\ x &= \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

Ak $a \neq 1$ a súčasne $a \neq -1$, tak (1) má 1 riešenie.
Tieto riešenia majú vhodné geometrické interpretácie v oblasti osovej súmernosti. Žiaci často zabúdajú, že samodružnou priamkou nie je len os, ale aj priamky na ňu kolmé ($a = -1$).

Kvadratická funkcia typu $x^2 + a$

$f(x) = x^2 + a,\ x \geq 0$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x-a},\ x \geq a$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f^{-1}(x) \\
x^2 + a &= \sqrt{x-a} \\
x^4 + 2ax^2 + a^2 &= x - a \\
x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a &= 0 \\
x^4 + 2ax^2 + x^2 - x^2 - x + a^2 + a &= 0
\end{aligned}$$

Kvadratická funkcia typu $x^2 + a$

$$
\begin{aligned}
x^4 + (2a+1)x^2 - x^2 - x + a^2 + a &= 0 \\
\left(x^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 - x + a^2 + a &= 0 \\
\left(x^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - a^2 - a - \frac{1}{4} - x^2 - x + a^2 + a &= 0 \\
\left(x^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) &= 0 \\
\left(x^2 + \left(a + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= 0 \\
\left(x^2 + x + (a+1)\right)\left(x^2 - x + a\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Kvadratická funkcia typu $x^2 + a$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(a+1)}}{2} \qquad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$$

$a \in (-\infty, 0)$	$\left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\}$
$a \in \left\langle 0, \frac{1}{4} \right)$	$\left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\}$
$a = \frac{1}{4}$	$\left\{ \frac{1}{2} \right\}$
$a \in \left(\frac{1}{4}, \infty \right)$	$\emptyset$

Exponenciálna a logaritmická funkcia

Problematika exponenciálnej a logaritmickej funkcie sa v súčasnosti vyučuje v rámci 3. ročníka gymnázia. Logaritmická funkcia $y = \log_a x$ je inverznou funkciou k funkcii $y = a^x$ pre reálne číslo $a > 0$, $a \neq 1$. Budeme analyzovať počet riešení rovnice $a^x = \log_a x$ pre reálny parameter $a > 0$, $a \neq 1$. Grafická interpretácia tejto úlohy znamená, že hľadáme počet spoločných bodov grafov funkcií a^x, $\log_a x$. Keďže sú tieto funkcie navzájom inverzné, tak sú ich grafy osovo súmerné podľa osi $x = y$.
Niekedy u žiakov vzniká nesprávna predstava, že pre $0 < a < 1$ grafy týchto funkcií majú len jeden spoločný bod a pre $a > 1$. žiaden. Grafy funkcií $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ však majú aj dva spoločné body $[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ mimo priamky $y = x$ by mala mať len jedno riešenie. Pomocou názornej ukážky v programe WinPlot ukážeme, že tento problém je nielen v prípade $0 < a < 1$, ale aj $a > 1$.

Rovnice typu $f(x) = f^{-1}(x)$

Pre rovnice typu $f(x) = f^{-1}(x)$ platia dve nasledovné lemy:

Lemma

Nech a je riešením rovnice $f(x) = f^{-1}(x)$. Potom aj $f(a)$ je riešením tejto rovnice.

Dôkaz.

Ak $f(a) = f^{-1}(a)$, potom $f(f(a)) = f(f^{-1}(a)) = a = f^{-1}(f(a))$. Preto $f(f(a)) = f^{-1}(f(a))$. □

Z tejto lemy vyplýva, že ak $a \neq f(a)$ ($a < f(a)$ alebo $a > f(a)$) a f je spojitá funkcia na intervale $I, (a, f(a) \in I)$, tak existuje reálne číslo c ($a < c < f(a)$ alebo $a > c > f(a)$), pre ktoré platí $c = f(c)$. Vtedy $f^{-1}(c) = f^{-1}(f(c)) = c$. Preto c je tiež riešením rovnice $f(x) = f^{-1}(x)$. Preto ak grafy funkcií $f(x)$, $f^{-1}(x)$ majú aspoň jeden spoločný bod mimo priamky $y = x$, tak musia mať najmenej tri spoločné body.

Rovnice typu $f(x) = f^{-1}(x)$

Lemma

Ak f je rastúca funkcia, tak rovnica $f(x) = f^{-1}(x)$ *je ekvivalentná s rovnicou* $f(x) = x$.

Dôkaz.

Rovnica $f(x) = f^{-1}(x)$ je ekvivalentná s rovnicou $f(f(x)) = x$, lebo $f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$. Stačí dokázať, že rovnice $f(f(x)) = x$ a $f(x) = x$ sú ekvivalentné. Budeme dokazovať sporom. Nech $f(f(a)) = a$ a súčasne $f(a) \neq a$. Ak $f(a) < a$, tak $a = f(f(a)) < f(a) < a$, čo je spor. Podobne spor dostaneme aj pre $f(a) > a$. □

Dôsledok: Ak f je rastúca funkcia, tak všetky priesečníky grafov funkcií $f(x)$, $f^{-1}(x)$ ležia na priamke $y = x$.
Poznámka: Ak f je ľubovoľná funkcia, tak všetky riešenia rovnice $f(x) = x$ sú riešeniami rovnice $f(x) = f^{-1}(x)$, lebo $f^{-1}(x) = f^{-1}(f(x)) = x = f(x)$.

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $a > 1$

Vráťme sa teraz k našej rovnici $a^x = \log_a x$. Nech $a > 1$. Keďže $y = a^x$ je rastúca funkcia, tak rovnice $a^x = \log_a x$ a $a^x = x$ sú ekvivalentné. Definujme pre $x > 0$ funkciu $g(x) = a^x - x$. Rovnica $a^x = x$ je ekvivalentná s rovnicou $g(x) = 0$. My sa budeme zaoberať len počtom riešení tejto rovnice.
Hľadajme extrémy funkcie $g(x)$ pomocou diferenciálneho počtu:

$$
\begin{aligned}
g'(x) = a^x \ln a - 1 &= 0 \\
a^x \ln a &= 1 \\
a^x &= \frac{1}{\ln a} \\
x \ln a &= \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) = -\ln(\ln a) \\
x = c &= -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}
\end{aligned}
$$

$g''(x) = a^x \ln^2 a$. Pre $a > 1$ je $g''(x) > 0$ pre všetky $x > 0$. Preto je $g(x)$ konvexná pre všetky $x > 0$.

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $a > 1$

Keďže platí $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, tak počet riešení rovnice $g(x) = 0$, závisí od hodnoty funkcie $g(x)$ v jej minime. Ak je táto hodnota kladná, rovnica nemá riešenie. Ak je rovná nule, rovnica má práve jedno riešenie. V prípade, že je záporná, rovnica má dve riešenia. Zistime, ako sa táto hodnota mení v závislosti od parametra a. Pre $c = -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$ je $g(c) = a^c - c = e^{c \ln a} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} = e^{-\ln(\ln a)} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} = \frac{1}{e^{\ln(\ln a)}} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} + \frac{\ln(\ln a)}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}(1 + \ln(\ln a))$. Keďže $a > 1$, tak $\ln a > 0$. $g(c) > 0$, ak

$$\begin{aligned} 1 + \ln(\ln a) &> 0 \\ \ln(\ln a) &> -1 \\ e^{\ln(\ln a)} &> e^{-1} \\ \ln a &> \frac{1}{e} \\ a &> e^{\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

Preto pre $a > e^{\frac{1}{e}}$ rovnica nemá riešenie.

Zrejme $g(c) = 0$ pre $a = e^{\frac{1}{e}}$. Vtedy $c = -\frac{\ln(\ln e^{\frac{1}{e}})}{\ln e^{\frac{1}{e}}} = -\frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$. Rovnica má len toto jedno riešenie. Grafy funkcií $y = a^x$, $y = \log_a x$ majú spoločný bod $[e, e]$ a majú v tomto bode aj spoločnú dotyčnicu $y = x$.

Nakoniec $g(c) < 0$, pre $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. Vtedy má rovnica $g(x) = 0$ dve riešenia x_1, x_2 pre ktoré platí $0 < x_1 < c < x_2$.

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $0 < a < 1$

Pre $0 < a < 1$ rovnice $a^x = \log_a x$ a $a^x = x$ nie sú ekvivalentné, lebo funkcia $y = a^x$ je klesajúca. Funkcia $g(x) = a^x - x$ je klesajúca, lebo jej derivácia $g'(x) = a^x \ln a - 1 < 0$ pre $x > 0$ ($\ln a < 0$). Keďže $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = -\infty$, tak rovnica $g(x) = 0$ má len jedno riešenie z. Keďže $z = a^z$, tak platí aj $a^z = \log_a z$. Existujú aj iné hodnoty $x \neq z$, pre ktoré platí $a^x = \log_a x$? Skúmajme funkciu $h(x) = a^x - \log_a x$. Rovnice h(x)=0 a $a^x = \log_a x$ sú zrejme ekvivalentné.

$$h'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x \ln a} = \frac{x a^x \ln^2 a - 1}{x \ln a} = \frac{a^x \left(x \ln^2 a - \frac{1}{a^x} \right)}{x \ln a}.$$

$h'(x) \geq 0$, ak $x \ln^2 a - \frac{1}{a^x} \leq 0$, t. j. $\frac{1}{a^x} - x \ln^2 a \geq 0$ Znamienko $h'(x)$ teda určíme pomocou skúmania funkcie $u(x) = \frac{1}{a^x} - x \ln^2 a$. Táto funkcia má $\lim\limits_{x \to 0^+} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = \infty$. Jej derivácia $u'(x) = \frac{1}{a^x} \ln \left(\frac{1}{a} \right) - \ln^2 a$. Jej druhá derivácia $u''(x) = \left(\frac{1}{a} \right)^x \ln^2 \left(\frac{1}{a} \right)$ je kladná pre všetky $x > 0$, lebo $\frac{1}{a} > 1$.

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $0 < a < 1$

Funkcia $u(x)$ je konvexná pre všetky $x > 0$. Preto v bode $u'(x) = 0$ nadobúda minimum.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^x}\ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln^2 a &= 0\\
\frac{1}{a^x}\ln\left(\frac{1}{a}\right) &= \ln^2 a\\
\frac{1}{a^x} &= \frac{\ln^2 a}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\ln^2 a}{-\ln a} = -\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)\\
\left(\frac{1}{a}\right)^x &= \ln\left(\frac{1}{a}\right)\\
x\ln\left(\frac{1}{a}\right) &= \ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)\\
x = d &= \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}
\end{aligned}$$

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $0 < a < 1$

Platí $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \infty$. Funkcia je konvexná, preto znamienko funkčných hodnôt $u(x)$ závisí od hodnoty funkcie $u(x)$ v jej minime. Ak je táto hodnota kladná, $u(x) > 0$. Ak je rovná nule, $u(x) \geq 0$ a len v minime nadobúda $u(x)$ nulovú hodnotu. V prípade, že je záporná, existujú reálne čísla x_1, x_2 $(0 < x_1 < x_2)$ také, že $u(x_1) = u(x_2) = 0$. Vtedy na intervale (x_1, x_2) $u(x) < 0$ a $u(x) > 0$ pre $(0, x_1) \cup (x_2, \infty)$. Zistime, ako sa táto hodnota minima mení v závislosti od parametra a.

Pre $d = \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}$ je $u(d) = \left(\frac{1}{a}\right)^d - d\ln^2 a =$
$e^{d\ln\left(\frac{1}{a}\right)} - \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)}\ln^2 a = e^{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)} - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{1}{a}\right)\left(1 - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)\right)$.

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $0 < a < 1$

$u(d) > 0$ práve vtedy, keď

$$\begin{aligned}
1 - \ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) &> 0 \\
1 &> \ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right) \\
e &> e^{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{a}\right)\right)} \\
e &> \ln\left(\frac{1}{a}\right) \\
e &> -\ln a \\
-e &< \ln a \\
e^{-e} &< a
\end{aligned}$$

Pre $e^{-e} < a < 1$ $u(x) > 0$. Preto aj $h'(x) > 0$ a funkcia $h(x)$ je rastúca. Preto nadobúda hodnotu nula v jedinom bode (je to inak bod $z = a^z$) a rovnica $a^x = \log_a x$ má jediné riešenie.

Rovnica $a^x = \log_a x$ pre $0 < a < 1$

Ak $a = e^{-e}$ $u(x) \geq 0$. Vtedy $h'(x) \geq 0$. Derivácia $h'(x)$ v bode d nemení znamienko. $h'(d) = 0$, preto grafy funkcií $y = a^x, y = \log_a x$ majú v spoločnom bode $[d, d]$

$d = z = \frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{e^{-e}}\right)\right)}{\ln\left(\frac{1}{e^{-e}}\right)} = \frac{\ln(\ln e^e)}{\ln e^e} = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ spoločnú dotyčnicu.

Rovnica $a^x = \log_a x$ má jediné riešenie.

Ak $0 < a < e^{-e}$, tak existujú reálne čísla x_1, x_2 $(0 < x_1 < x_2)$ také, že $u(x_1) = u(x_2) = 0$. Vtedy na intervale (x_1, x_2) $u(x) < 0$ a $u(x) > 0$ pre $(0, x_1) \cup (x_2, \infty)$. Podobne na intervale (x_1, x_2) $h'(x) < 0$ a $h'(x) > 0$ pre $(0, x_1) \cup (x_2, \infty)$. Preto na intervale $(0, x_1)$ je funkcia $h(x)$ rastúca, na intervale (x_1, x_2) je funkcia $h(x)$ klesajúca a na intervale (x_2, ∞) je rastúca.

Ukážeme, že riešenie z rovnice $a^x = \log_a x$, pre ktoré $a^z = z$ je z intervalu (x_1, x_2). To je ekvivalentné s podmienkou $h'(z) < 0$. Ak to dokážeme, bude platiť $h(x_1) > h(z) = 0$, $h(0) = h(z) > h(x_2)$.

$a^z = z$. Preto $z \ln a = \ln z$. Odtiaľ $\frac{\ln z}{z} = \ln a$. Ak $0 < a < e^{-e}$, potom $\ln a < -e$. Dostali sme nerovnosť $\frac{\ln z}{z} < -e$. Z nej vyplýva $\ln z < -1$.
Ak by $\ln z \geq -1$, tak $\frac{\ln z}{z} \geq -\frac{1}{z}$. Ďalej $z \geq \frac{1}{e}$ a $-\frac{1}{z} \geq -e$. Preto $\frac{\ln z}{z} \geq -\frac{1}{z} \geq -e$. Preto musí platiť $\ln z < -1$.
$h'(z) = a^z \ln a - \frac{1}{z \ln a} = z \ln a - \frac{1}{z \ln a} = \ln z - \frac{1}{\ln z} =$

$= \frac{1}{\ln z}\left(\ln^2 z - 1\right) = \frac{1}{\ln z}(\ln z - 1)(\ln z + 1)$. $\ln z < -1$, preto $h'(z) < 0$.
Platí $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$. Preto na intervale $(0, x_1)$ existuje bod k, pre ktorý $h(k) = 0$ a na intervale (x_2, ∞) existuje bod m pre ktorý $h(m) = 0$. Z uvedených dôvodov existujú tri riešenia (k,z,m)rovnice $h(x) = 0$. Rovnica $a^x = \log_a x$ má tri riešenia.
Číslo $a = \frac{1}{16} = 0,0625$ je blízke číslu $e^{-e} \doteq 0,06599$. Už pre $a = \frac{1}{15} = 0,0\overline{6}$ rovnica $a^x = \log_a x$ má len jedno riešenie.

Zhrnutie

Tieto výsledky zhrnieme nasledovne:

a	Počet riešení rovnice $a^x = \log_a x$
$(0, e^{-e})$	3
$\{e^{-e}\}$	1 $\left(\frac{1}{e}\right)$
$(e^{-e}, 1)$	1
$\left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$	2
$\left\{e^{\frac{1}{e}}\right\}$	1 (e)
$\left(e^{\frac{1}{e}}, \infty\right)$	0