Riešenie extremálnych úloh pomocou A-G nerovnosti

JÁN GUNČAGA, SK

Abstract: *Extremal problems are usually solved by methods of the differential calculus. This paper shows a different way of solving. Some types of the problems in the field mathematics and physics can be solved by using the inequality between arithmetic and geometric means. This method can be used by the students of the first three years at gymasiums.*

Keywords: rastúca funkcia, maximum a minimum funkcie, substitúcia, použitie A- G nerovnosti pri riešení matematickej a fyzikálnej úlohy

Na hodinách matematiky pri rozličných súťažiach sa žiaci a učitelia najmä na strednej škole môžu stretnúť s úlohami na maximum a minimum. Tieto úlohy sa obvykle riešia pomocou diferenciálneho počtu, ktorý sa preberá až v 4. ročníku. Ak sa spomínané úlohy vyskytnú v nižších ročníkoch, vznikajú mnohé ťažkosti s ich riešením. Veľké množstvo týchto úloh možno riešiť pomocou nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom, t.j. pomocou A-G nerovnosti.

Na úvod si uvedieme niektoré základné tvrdenia, ktoré pri riešení týchto úloh budeme potrebovať:

Lema 1. Nech je dané číslo c a funkcia f definovaná v istom intervale $\langle a,b\rangle$ obsahujúcom bod c. Ak funkcia f má v bode c lokálne maximum (minimum), tak má v bode c lokálne maximum (minimum) pre každé $k \in R^+$, $q \in R$ aj funkcia $g(x) = k.f(x) + q$.

Dôkaz : Budeme robiť dôkaz len pre maximum, lebo pre minimum by sa robil analogicky. Z predpokladu vieme, že musí existovať kladné δ, že pre všetky $x \in (c-\delta, c+\delta)$ je $f(x) \le f(c)$. Keďže $k \in R^+$, tak platí:

$$k.\,f(x) \le k.f(c)$$

$$k.\,f(x)+q \le k.f(c)+q$$

$g(x) \le g(c)$, čím sme dokázali, že funkcia g (x) nadobúda v bode c lokálne maximum.

Lema 2. Nech je dané číslo c a funkcia f definovaná v istom intervale $\langle a,b\rangle$ obsahujúcom bod c . Nech g je rastúca funkcia definovaná na H(f) . Potom platí: Ak funkcia f má v bode c lokálne maximum (minimum), tak aj funkcia g(f(x)) má v bode c lokálne maximum (minimum) .

Dôkaz : Dôkaz urobíme len pre maximum, lebo pre minimum by sa urobil podobne. Pre funkciu f platí, že musí existovať také kladné δ, že pre všetky x z intervalu $(c-\delta,\ c+\delta)$ platí $f(x) \le f(c)$. Funkcia g je rastúca, preto pre každé reálne $y_1 < < y_2$ platí: $g(y_1) < g(y_2)$. Je jasné, že ak $y_1 = y_2$, tak $g(y_1) = g(y_2)$. Preto možno tvrdiť, že ak $y_1 \leq y_2$, tak $g(y_1) \leq g(y_2)$. Ak položíme $y_1 = f(x)$ a $y_2 = f(c)$ dostávame: $f(x) \leq f(c)$, teda $g(f(x)) \leq g(f(c))$.Preto funkcia $g(f(x))$ nadobúda maximum v bode c.

Veta (A-G nerovnosť)**.** Nech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^+$. Potom platí :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2.\ldots.x_n}$$

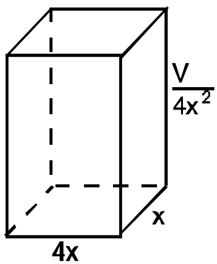
pričom rovnosť nastáva v prípade, že $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dôkaz je pomerne zdĺhavý, je možné ho nájsť napríklad v [4]. Použitie tejto vety možno ilustrovať na tejto matematickej úlohe:

Príklad 1. Silážna jama má tvar pravouhlého rovnobežnostena s objemom $200m^3$. Jej dĺžka je štvornásobkom šírky.Náklady na 1 m^2 základne sú 2 krát menšie ako na 1 m^2 steny.Aké musia byť rozmery silážnej jamy, aby jej stavba bola najlacnejšia ?

Riešenie : Ak 1 m^2 základne stojí t Sk , tak 1 m^2 steny stojí 2t Sk. Označme šírku ako x , potom dĺžka bude 4x , a teda obsah podstavy je $4x^2$ .Aby jama mala objem V, tak výška musí byť $\frac{V}{4x^2}$. Celkový obsah bočných stien jamy je $\frac{5V}{2x}$.

Obr. 1



Náklady na silážnu jamu bude vyjadrovať výraz

$$N(x) = 4x^2 . t + \frac{5V}{2x} . 2t = t . \left(4x^2 + \frac{5V}{x}\right)$$

Keďže t je konštanta , výraz pre náklady závisí len od x . Aby náklady boli najmenšie výraz v zátvorke musí byť minimálny. Rozpíšme ho v tvare $4x^2 + + \frac{5V}{2x} + \frac{5V}{2x}$ a použime A - G nerovnosť:

$$\frac{4x^2 + \frac{5V}{2x} + \frac{5V}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{4x^2 . \frac{5V}{2x} . \frac{5V}{2x}}$$

$$4x^2 + \frac{5V}{x} \geq 3.\sqrt[3]{25V^2}$$

rovnosť nastane vtedy, ak $4x^2 = \frac{5V}{2x} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{5V}{8}}$

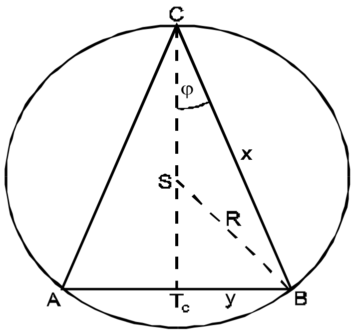
pre náš prípad $x = \sqrt[3]{\dfrac{5.200m^3}{8}} = 5$ m .

Hľadané rozmery silážnej jamy sú 5 m , 20 m a 2 m .

V niektorých príkladoch možno využiť metódu substitúcie ako napríklad v tomto :

Príklad 2. Do kružnice vpíšte rovnoramenný trojuholník s maximálnym obvodom.

Obr. 2



Riešenie : Označme v trojuholníku ABC

$|AC| = |BC| = x \qquad |AT_C| = |T_C B| = y$

$|\angle T_C CB| = |\angle T_C CA| =$ φ , pričom 0° < φ < 90°

Platí $\dfrac{x}{2} = R \cdot \cos\varphi \Rightarrow x = 2R \cdot \cos\varphi$

$\dfrac{y}{x} = \sin\varphi \Rightarrow y = x \cdot \sin\varphi = 2R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$

Pre obvod trojuholníka dostávame

$O = 2.(x + y) = 2.(2R.\cos\varphi + 2R.\cos\varphi.\sin\varphi) =$

$= 4R.\cos\varphi \cdot (1 + \sin\varphi)$.

Tento výraz je maximálny, ak výraz $V = \cos\varphi \cdot (1 + \sin\varphi)$ je maximálny. Zaveďme substitúciu $1 + \sin\varphi = u$. Potom $\sin\varphi = u - 1 \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1 - (u-1)^2} =$

$= \sqrt{1 - (u^2 - 2u + 1)} = \sqrt{2u - u^2} = \sqrt{u.(2-u)}$. Po substitúcii výraz V má tvar :

$V = u.\sqrt{u.(2-u)} = \sqrt{u^3.(2-u)}$. Bude maximálny, ak výraz pod odmocninou bude maximálny , teda $u^3.(2-u) = \max. \Leftrightarrow \dfrac{u}{3}.\dfrac{u}{3}.\dfrac{u}{3}.(2-u) = \max.$

Použime A - G nerovnosť : $\sqrt[4]{\dfrac{u}{3}.\dfrac{u}{3}.\dfrac{u}{3}.(2-u)} \le \dfrac{\dfrac{u}{3} + \dfrac{u}{3} + \dfrac{u}{3} + 2 - u}{4}$

Rovnosť nastane , ak $\dfrac{u}{3} = 2 - u \Rightarrow u = \dfrac{3}{2}$

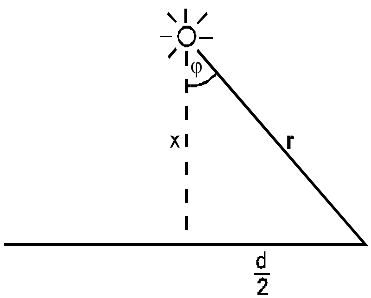
Keďže $1 + \sin\varphi = u \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^0$.

Veľkosť uhla ACB je 60^0 , takže hľadaný trojuholník je rovnostranný.

Pomocou A-G nerovnosti možno riešiť aj niektoré fyzikálne úlohy. Poukazuje na to aj nasledujúci príklad:

Príklad 3. Nad stredom kruhovej ľadovej plochy klziska je umiestnený svetelný zdroj . V akej výške musí byť umiestnený , aby dva protiľahlé okraje ľadovej plochy , ktoré sú rovnako vzdialené od zdroja svetla a ich vzájomná vzdialenosť je d mali najlepšie osvetlenie ?

Obr. 3



Riešenie : Na okraje klziska dopadne svetlo pod uhlom dopadu φ . Preto pre osvetlenie E platí $E = \frac{I}{r^2} . \cos\varphi$ (1), kde I je svietivosť zdroja svetla . V našom prípade môžeme vyjadriť

$$r = \sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

Po dosadení do (1) dostávame :

$$E = \frac{I}{x^2 + \frac{d^2}{4}} . \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{d^2}{4}}} = \frac{I.x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

. Tento výraz má byť maximálny .

$$\frac{I.x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \max . \Leftrightarrow \frac{x}{\left(x^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \max . \Leftrightarrow \left(\frac{x^2 + \frac{d^2}{4}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}} = \max . \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^{\frac{4}{3}} + \frac{d^2}{4} . \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \min.$ Zaveďme substitúciu $x^{\frac{2}{3}} = u$ (2) . Výraz nadobudne tvar $u^2 + \frac{d^2}{4} . \frac{1}{u} = u^2 + \frac{d^2}{8} . \frac{1}{u} + \frac{d^2}{8} . \frac{1}{u}$. Výraz má byť minimálny, aplikujme na neho A - G nerovnosť :

$$\frac{u^2+\frac{d^2}{8}.\frac{1}{u}+\frac{d^2}{8}.\frac{1}{u}}{3}\geq\sqrt[3]{u^2.\frac{d^2}{8}.\frac{1}{u}.\frac{d^2}{8}.\frac{1}{u}}$$

Rovnosť nastane v prípade, že $u^2=\frac{d^2}{8}.\frac{1}{u}\quad\Rightarrow\quad u=\sqrt[3]{\frac{d^2}{8}}$. Ak tento výsledok dosadíme do vzťahu (2) dostaneme $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{d^2}{8}}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{d}{2.\sqrt{2}}$

Ak je teda vzdialenosť okrajov klziska d, budú najlepšie osvetlené , ak bude zdroj svetla vo výške $\frac{d}{2.\sqrt{2}}$.

Poznámka: Iný spôsob riešenia tejto úlohy možno nájsť v [3] .

Úlohy na precvičenie:

1. Do daného rotačného kužeľa vpíšte súosý valec s maximálnym objemom.

2. Do polkružnice je vpísaný lichobežník, ktorého dlhšia základňa je zhodná s priemerom polkružnice. Nájdite ten, ktorý má maximálny obsah.

3. Zistite, kedy je v uzavretom obvode výkon na rezistore vo vonkajšej časti obvodu maximálny.

4. Tuhé teleso s hmotnosťou m sa môže otáčať bez trenia okolo horizontálnej osi, ktorej vzdialenosť od ťažiska je d. Moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, rovnobežnú s osou otáčania telesa, je I_0. Teleso vychýlime zo stálej rovnovážnej polohy o malý uhol φ. Potom teleso uvolníme. Určte v akej vzdialenosti d_1 od ťažiska má byť os otáčania telesa, aby perióda jeho harmonických kmitov bola najmenšia. Určte túto dobu kmitov T_1.

Literatúra:

[1] Gunčaga J.: Úlohy na maximum a minimum. Dipl. práca. Bratislava, MFF UK 1997

[2] Eliáš J.a kol..: Zbierka úloh z vyššej matematiky 2. Bratislava, Alfa 1968

[3] Pereľman I. J.: Zajímavá algebra. Praha, SNTL 1985

[4] Kufner A.: Nerovnosti a odhady, ŠMM 39. Praha, Mladá fronta 1975

[5] Riečan B., Vaňatová L.: Matematika pre gymnáziá 7. Bratislava, SPN 1980

[6] Žampa K., Kluvanec D., Simerský M., Volf I.: XXIII. ročník FO. Praha, SPN 1985

[7] Žampa K., Kluvanec D., Simerský M., Volf I.: XXV. ročník FO. Praha, SPN 1988