K PROPEDEUTIKE POJMU DERIVÁCIA

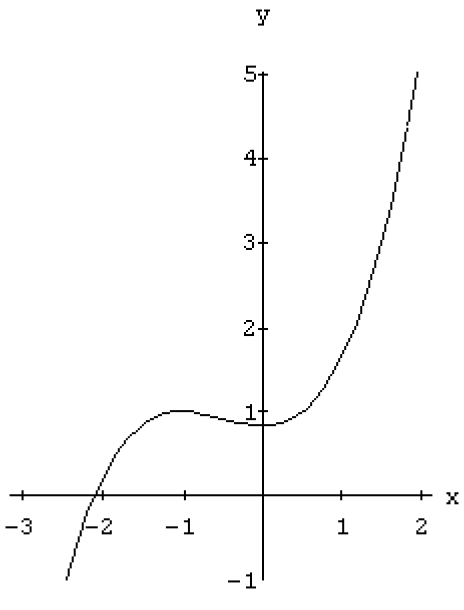
Ján Gunčaga

Kľúčové slová: derivácia, zmenšenie grafu, program Mathematica

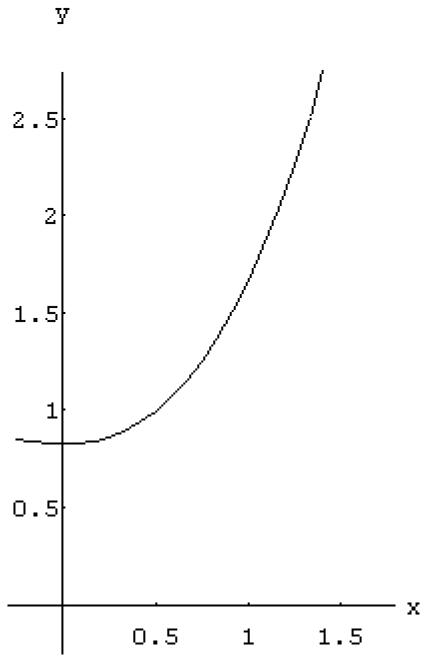
1 Úvod

Pojem derivácia funkcie sa preberá v poslednom ročníku gymnázia. Najčastejšie je využívaný pri pojme smernica dotyčnice funkcie v bode. Veľmi dlho bola smernica dotyčnice funkcie v bode predstavovaná ako limita sečníc funkcie, ktoré prechádzajú dotykovým bodom. Profesor Arnold Kirsch už približne pred 25 rokmi pripravil učebnú pomôcku – fólie pre spätný projektor na vyučovanie matematickej analýzy, kde pojem smernice dotyčnice funkcie ako derivácie didakticky spracoval iným spôsobom, ktorý v čase, keď vznikol, do určitej miery predbehol svoju dobu. Využíva v ňom skutočnosť, že keď graf spojitej funkcie v okolí dotykového bodu zobrazíme detailnejšie - akoby „zväčšíme pod mikroskopom“, graf akejkoľvek krivky pri dostatočnom „zväčšení“ sa prakticky zmení na priamku, ktorej smernica nám s veľkou presnosťou určí hodnotu derivácie funkcie v danom bode.

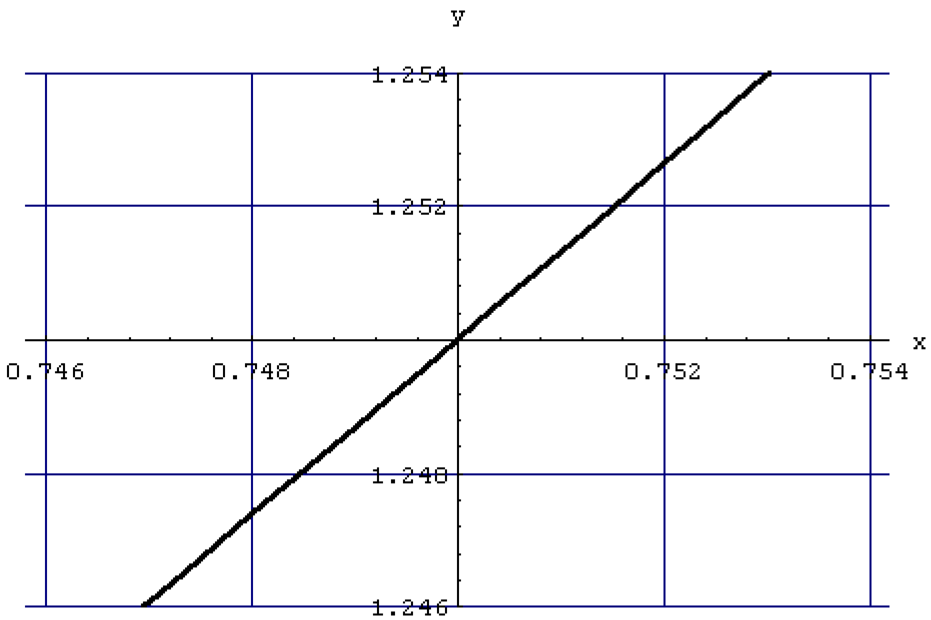
Kirsch v [1] ukazuje svoj „mikroskop“ na príklade funkcie f(x) = $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{53}{64}$, pričom hľadá jej deriváciu v bode P[0,75;1,25]. Najprv je študentom ukázaný nasledovný graf:



Potom je graf v okolí bodu P [0,75;1,25] „zväčšený“:



Keby sme vo „zväčšovaní“ pokračovali dostali by sme nakoniec podľa Kirscha graf:



Teraz je možné približne určiť f´(0,75)≈1,31.

2 Využitie metódy „mikroskopu“ budúcimi učiteľmi

Hore spomenutú metódu „mikroskopu“ grafu spojitej funkcie možno jednoducho využiť pri použití grafických kalkulátorov alebo matematických výukových programov vo vyučovaní matematiky. To ma viedlo pri výučbe predmetu *Výukový softvér z matematiky*, aby som študentom 2. ročníka učiteľstva matematiky ukázal túto metódu v programe *Mathematica* a zadal som im domácu úlohu, aby si vymysleli nejakú spojitú funkciu, zvolili si na jej grafe ľubovoľný bod a určili deriváciu v ňom touto metódou. Teraz si ukážeme aspoň niektoré študentské práce.

Napríklad Mária si zvolila pomerne komplikovanú funkciu $f(x) = x^3 + \frac{x^3}{x+1}$ a vypočítala si hneď aj deriváciu v bode 0,35:

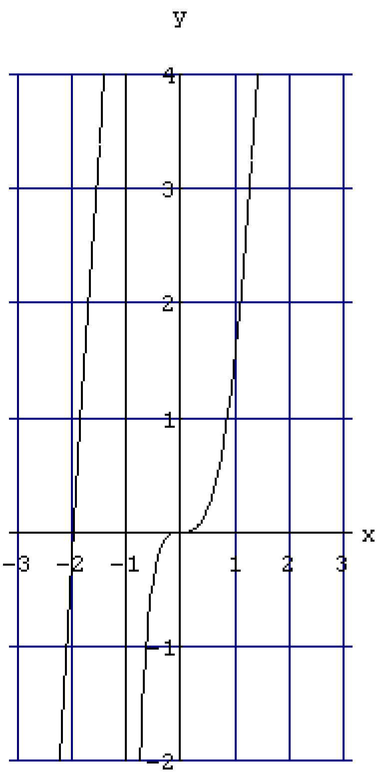
f[x_]=x^3+(x^3)/(1+x)
df[x_]=D[f[x],x]
df[0.35]

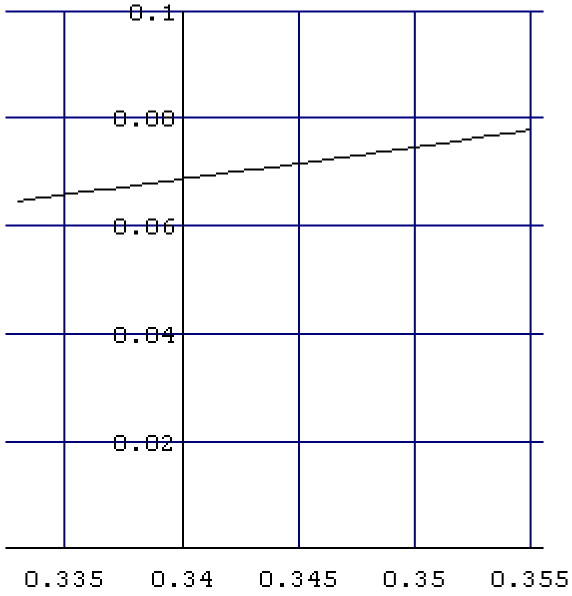
$$x^3 + \frac{x^3}{x+1}$$

0.616197

Potom postupne kreslila grafy funkcie:

Plot[f[x],{x,-3,6}, PlotRange->{-2,4},AspectRatio-> 2,GridLines->Automatic,AxesLabel->{"x","y"}]
Plot[f[x],{x,0.333,0.355},PlotRange->{0,0.1},AspectRatio->1,GridLines->Automatic]

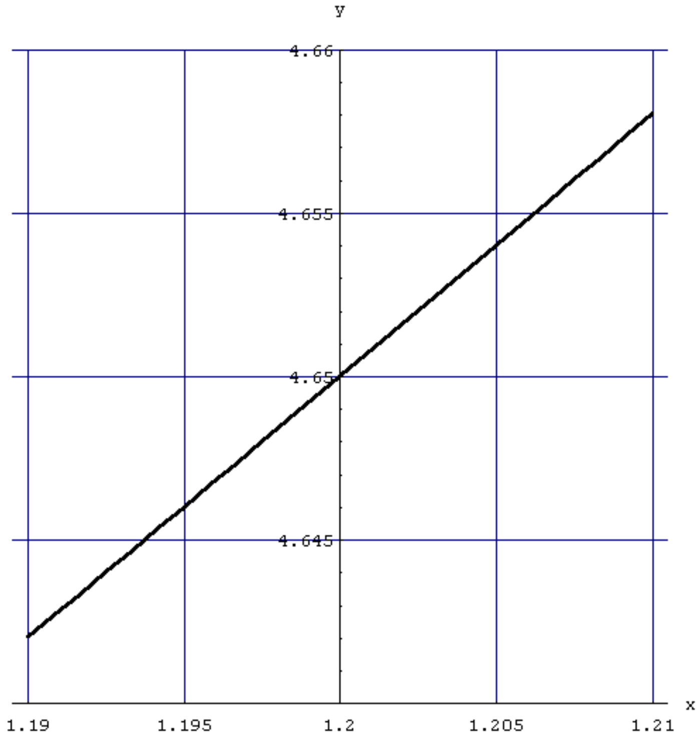




Na tejto študentskej práci vidno, že študentka si nezvolila vhodne parametre znázornenia grafu, preto sa jej pomerne ťažko určovala hodnota derivácie.

Oveľa šikovnejšie si počínala Gabriela, ktorá použila jednoduchšiu funkciu f(x)=$\frac{x^2+1}{4}+\frac{x-1}{5}+4$ a aj vhodnejšie parametre zobrazovania grafov. Po viacnásobnom „zväčšení“ dostala:

Plot[f[x],{x,1.19,1.21},PlotRange->{4.64,4.66},AspectRatio->1,GridLines->Automatic, AxesLabel->{"x","y"}]



Z tohto grafu pomerne presne mohla určiť približnú hodnotu derivácie v bode 1,2:
(4.658-4.642)/(1.21-1.19)
0.8
Táto hodnota je dokonca totožná s vypočítanou hodnotou:
df[x_]=D[f[x],x]

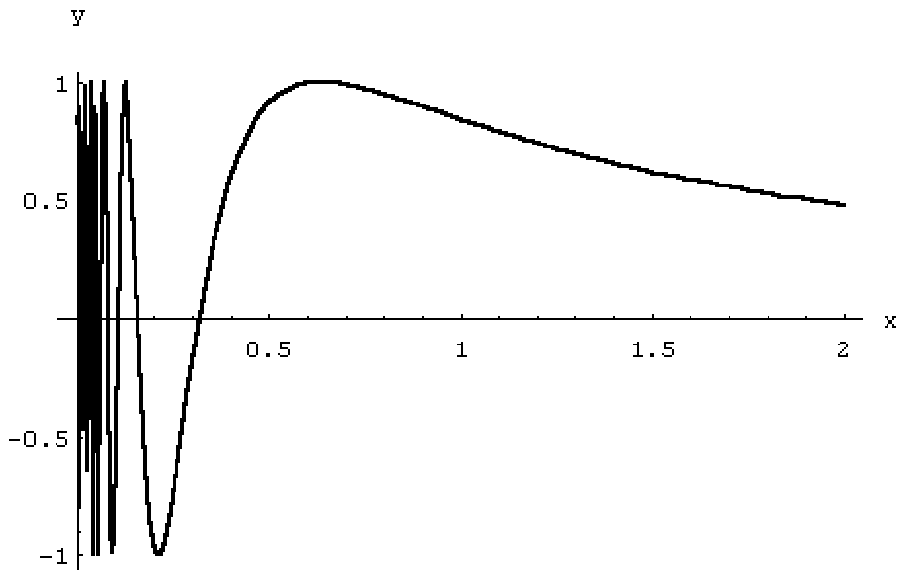
$\frac{1}{5}+\frac{x}{2}$

df[1.2]
0.8

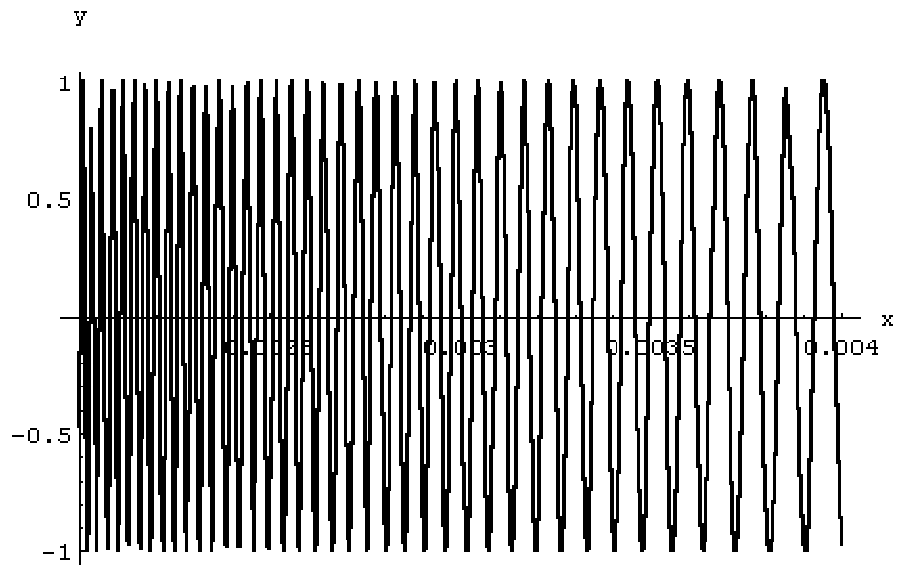
3 Funkcie s problematickým tvarom grafu

Metóda „mikroskopu“ je vhodná najmä pre spojité funkcie, ktoré majú v každom bode deriváciu a ktoré sú monotónne na intervaloch, ktorých šírka je aspoň 0,5. Ak si žiaci alebo študenti sami zvolia funkciu, ktorej tvar grafu je problematický, môže to spôsobiť určité ťažkosti vo vyučovaní alebo navodiť zaujímavé problémové situácie.

Vezmime si graf funkcie $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ v pravom okolí bodu 0. Výukové programy nemusia zakresliť správne graf funkcie a aj určenie derivácie, napríklad v bode 0,003, môže byť problém. Skúsme nakresliť graf funkcie v programe Mathematica:
Plot[Sin[1/x],{x,0.001,2},AxesLabel->{“x”,”y”}]



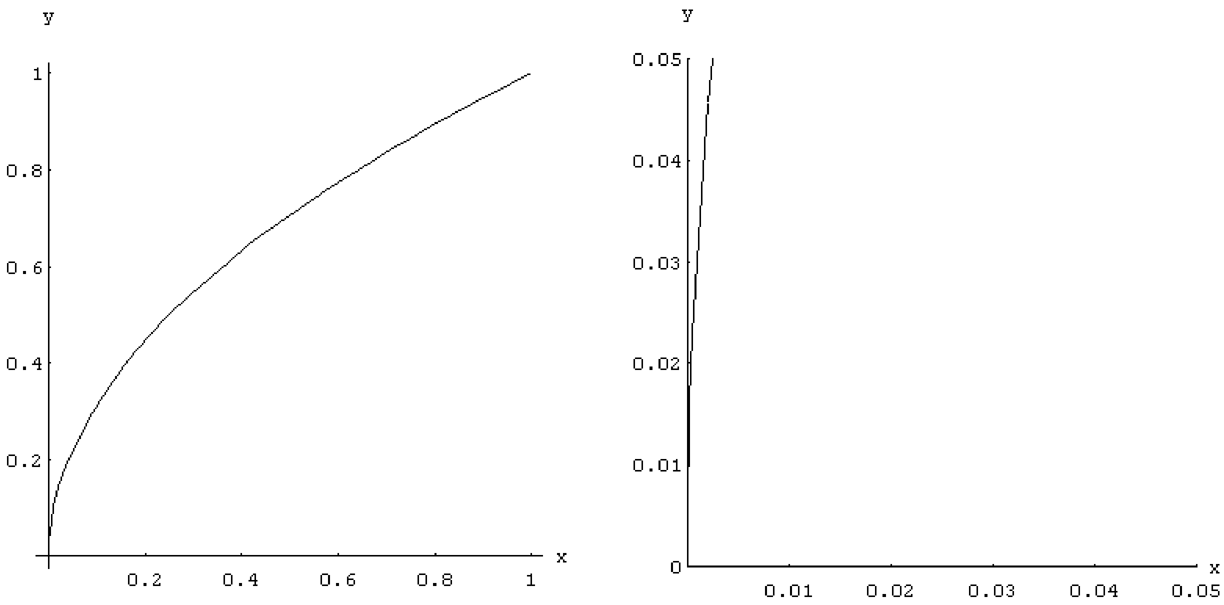
Plot[Sin[1/x],{x,0.002,0.004},AxesLabel->{“x”,”y”}]



Ďalšou skupinou funkcií môžu byť tie, ktoré majú v danom bode deriváciu, ktorá konverguje do $\pm\infty$. Skúmajme graf funkcie g(x)=$\sqrt{x}$ v pravom okolí bodu 0 a „zväčšime ho“:

Plot[Sqrt[x],{x,0,1},AspectRatio->1,AxesLabel->{“x”,”y”}]

Plot[Sqrt[x],{x,0,0.05},PlotRange->{{0,0.05},{0,0.05}},AspectRatio->1,AxesLabel->{“x”,”y”}]



Žiaci by z tvaru grafu zistili, že derivácia funkcie g(x)=$\sqrt{x}$ konverguje v bode 0 do $+\infty$.

4 Záver

Cieľom výučby tejto metódy pre budúcich učiteľov nebolo získať nejaké numerické zručnosti pri výpočte derivácie, ale získať praktickú učiteľskú zručnosť pri využívaní grafu funkcie nakresleným výukovým programom. Horeuvedené problémy poukazujú na to, že pri príprave budúcich učiteľov je potrebné venovať pozornosť praktickým prezentačným zručnostiam. Uvedená metóda „mikroskopu“ grafu funkcie je aj v súlade s propedeutikou pojmu derivácia uvedenej v najnovších učebných osnovách pre posledný ročník osemročného gymnázia (pozri [2]). Na „zväčšovanie“ grafu funkcie v okolí bodu jej grafu sa totiž môžeme pozerať aj ako na skúmanie závislosti dráhy od času v skracujúcich sa časových intervaloch.

Literatúra

[1] Kirsch A.: Foliensatz Analysis Serie A. Hannover, Hermann Schroedel Verlag KG, 1980

[2] *Ministerstvo školstva Slovenskej republiky, OSNOVY osemročné štúdium, MATEMATIKA povinný učebný predmet*. In: http://www.spu.sanet.sk/ pedagogicke_dokumenty/uo-gym_ss.htm

[3] Hecht T.: *Matematická analýza. Logika*. Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana 2000

PaedDr. Ján Gunčaga
Katedra matematiky a fyziky PF KU
Námestie A. Hlinku 56
034 01 Ružomberok
guncaga@fedu.ku.sk