Niektoré motivačné metódy pri vyučovaní limitných procesov

Ján Gunčaga

Abstract: *This time in Slovakia a transmissive type of teaching is very widespread. In this type it is typical that students learn accomplished facts, algorithms, formulas an so on. For constructivist type of teaching it is typical that students are more active in the teaching process. The teacher had a position of a presenter who presents and guides the discussion. Limit processes are very abstract subject for most students. Most teachers teach this subject as a collection of definitions, propositions and proofs without suitable models in it, which can prepare students for this subject.*

1. Úvod

Limitné procesy sa v školskej matematike preberajú obvykle počas 4. ročníka gymnázia. Nepatria medzi najobľúbenejšie časti školskej matematiky, pretože sú pomerne náročné na pochopenie. Jednak je to spôsobené tým, že definície pojmov obsahujú veľa kvantifikátorov a ďalej je dosť rozšíreným javom, že tieto procesy sú študentom predkladané ako súbor poučiek, definícií, viet a dôkazov. Je to dôsledok rozšíreného transmisívneho vyučovania. V súčasnosti sa v modernej teórii vyučovania matematiky prejavuje trend konštruktivistického vyučovania, ktoré kladie väčší dôraz na samostatnosť a aktivitu študenta pri získavaní nových poznatkov.

V dňoch 8 až 15. januára 2002 som mal možnosť zúčastniť sa kurzu v rámci programu Socrates Comenius *CZ-01-2001-02 Empowering Mathematics Teachers for the Improvement of School Mathematics.* V tomto článku by som chcel predstaviť niektoré zaujímavé výsledky, ktoré som získal počas dvoch projektov. Prvý bol realizovaný v rámci modulu A tohto kurzu, ktorý viedol profesor Graham Littler z Univerzity v Derby (Veľká Británia). Druhý bol realizovaný v rámci modulu C tohto kurzu, ktorý viedol Stigerik Börjars z Univerzity Karlstadt (Švédsko).

2. Experiment v rámci prvého projektu

Experimenty v rámci oboch projektov som realizoval v skupine študentiek učiteľstva pre 1. stupeň ZŠ. V rámci prvého projektu boli študentkám zadané problémové úlohy, ktoré riešili samostatne. Potom prebiehala diskusia v celom krúžku k daným problémom. Uvediem aspoň niektoré z problémov:

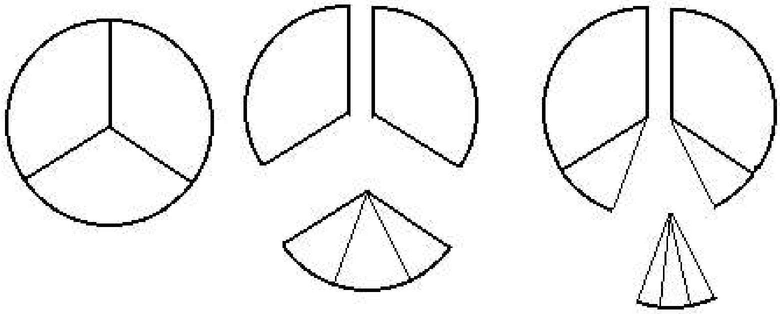
Problém č. 1 Keď vystrelím šíp smerom k cieľu, ten musí preletieť najprv polovicu vzdialenosti medzi mnou a cieľom, potom polovicu z tej zvyšnej polovice čiže štvrtinu, potom osminu atď. Preto šíp nikdy nedoletí do cieľa. Mal Zenón pravdu?

Problém č. 2 Achilles bežal opreteky s korytnačkou. Dal jej náskok 100 metrov. Achilles beží 10 krát rýchlejšie, preto keď prebehne 100 metrov, korytnačka sa posunie o 10 metrov. Ak prejde ďalších 10 metrov, korytnačka prejde 1 meter atď. Preto Achilles korytnačku nikdy nedobehne. Mal Zenón pravdu?

Problém č. 3 Vydelil som 1 : 3 = 0,3333333 na kalkulačke. Potom som vynásobil a dostal som 0,3333333x3=0,9999999 Je 0,9999999=1?
Keď x=1:3, je potom 3x=1? Čo vieme povedať o čísle x? Je 0,99999.....=1? Prečo?

Existujú aj kalkulačky ktoré vypočítajú 0,3333333 x 3 = 1. Sú tieto kalkulačky lepšie?

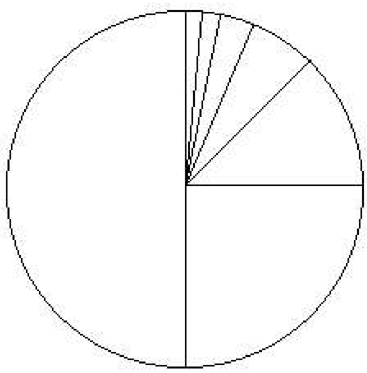
Problém č. 4 Vieme, že $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=1$. Koľko je $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...$?
Je to možné ukázať geometricky:



Je možné zistiť geometricky, že ak q > 1 a q ∈ N, potom čomu je rovný výraz
$\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+...?$

3. Výsledky experimentu

Problém č. 1
Pre niektorých študentov sa javila Zenónova argumentácia ako logicky protirečivá, pre ďalších študentov bolo podstatné to, akou veľkou silou je vystrelený šíp. Domnievali sa, že ak tá sila je malá, tak ten šíp do cieľa nedoletí a v tomto prípade má Zenón pravdu. Jedna študentka veľmi presne argumentovala, že ak by sme prijali Zenónov spôsob uvažovania, tak by sa nikto nemohol presunúť z jedného miesta na druhé. Keďže názory študentov boli rôzne, pokúsili sme sa úlohu matematizovať tým, že sme si zvolili vzdialenosť k terču 10 metrov. Tu vyvstal problém s výpočtom radu
$5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+...$. Niektorí študenti tvrdili, že je to presne 10, iní, že je to len približne 10. Jedna študentka si pri vysvetľovaní prečo je to presne 10 pomohla aj nasledovnou geometrickou schémou:



Keďže ani tento argument študentov s opačným názorom nespresvedčil, bolo potrebné odvodiť súčet tohto radu pomocou limity čiastočných súčtov.

Problém č. 2
Všetci študenti boli síce presvedčení o tom, že Achilles korytnačku dobehne avšak ich zdôvodnenia boli rôzne. Najväčšia časť študentov argumentovala väčšou fyzickou silou Achilla. Niektorí vychádzali aj z predchádzajúceho problému, že ak šíp doletí do terča, tak potom aj Achilles musí dobehnúť korytnačku.

Jedna študentka podala zaujímavé vysvetlenie: Ak by celá dráha Achilla merala 1000 metrov, tak dráha korytnačky bude 900 metrov. Nech
rýchlosť korytnačky je 1 $m.s^{-1}$. Potom rýchlosť Achilla je 10 $m.s^{-1}$. Ak vychádzame zo vzťahu dráha = rýchlosť $\times$ čas, tak potom by Achilles prešiel svoju dráhu za 100 s a korytnačka za 900 s, a tak Achilles predbehne korytnačku.

Nakoniec pomocou súčtu nekonečného radu určili študenti dráhu, za ktorú prejde Achilles, kým dobehne korytnačku.

Problém č. 3

Dve tretiny študentov sa domnievalo, že kalkulačka, ktorá dáva výsledok 1 je lepšia a jedna tretina mala opačný názor. Podobne ako v probléme č. 1 bol medzi študentami spor, či číslo $0,\overline{9}$ je približne alebo presne 1. Keďže tento problém súvisel s pojmom racionálneho čísla a jeho zápisom vo forme desatinného čísla, využili sme príklad čísla $\frac{1}{3}$. Tu však u jednej študentky došlo k zaujímavej úvahe:

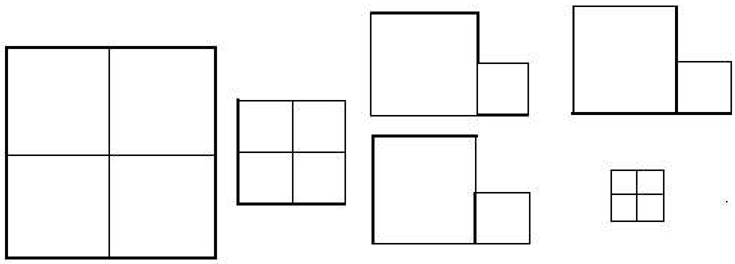
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $\quad \frac{1}{3}.3 = 1$ $\quad 0,\overline{3}.3 = 0,\overline{9}$. Ale $0,\overline{3} \neq \frac{1}{3}$, lebo $0,\overline{3}.3 = 0,\overline{9}$ a $0,\overline{9} \neq 1$.

Táto chybná úvaha poukázala na to, ako je dôležité chápanie pojmu racionálne číslo z hľadiska limitného procesu. Je potrebné, aby študenti poznali skutočnosť, že každé racionálne číslo je súčtom nejakého nekonečného radu. Preto sme pokračovali nasledovne: Ak 5342 = 5.1000 + 3.100 + 4.10 + 2, potom $0,\overline{9}$=9.0,1 + 9.0,01 + 9.0,001 + ... = 0,9.(1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 +...) = $\frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$

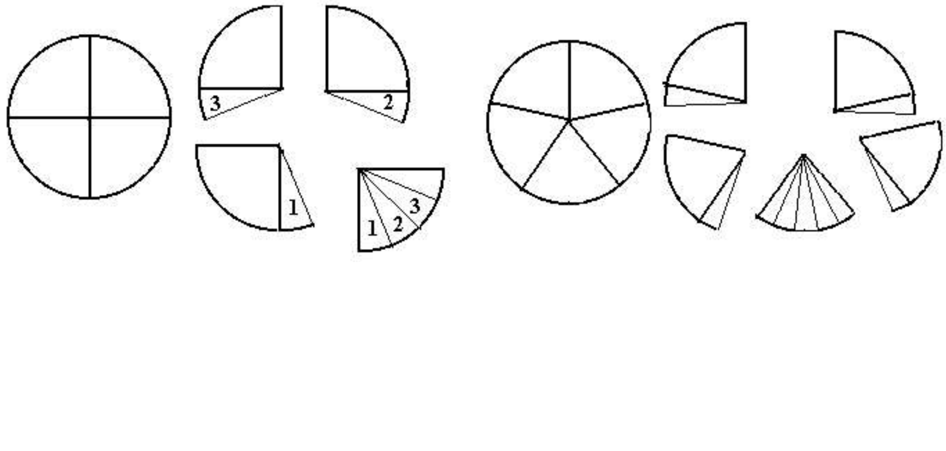
Problém č. 4

V tomto probléme išlo hlavne na ukázanie možnej geometrickej interpretácii pojmu súčet nekonečného radu, na ktorú sa často zabúda. Študenti sa snažili najprv nájsť vzťah pre q = 4, 5 a potom vzťah zovšeobecniť. Nebolo cieľom tejto úlohy nájsť presný matematický dôkaz.

Bolo zaujímavé, že polovica študentov využila pri riešení model štvorca alebo obdĺžnika:



Druhá polovica študentov zostala pri modeli kruh:



Nájsť vzťah $\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}+...=\frac{1}{q-1}$ vedela tretina študentov.

4. Experiment v rámci druhého projektu

Tento projekt bol zameraný na skupinovú prácu. Každý člen skupiny dostal jednu podmienku zadania problému. Problémy boli formulované tak, že úlohou skupiny bolo nájsť objekt, ktorý by spĺňal všetky podmienky, ktoré dostal každý jednotlivý člen skupiny. Uvediem aspoň niektoré problémy pre jednotlivé skupiny:

Problém č.1 Nájdi vzťah pre n-tý člen postupnosti.
a) Prvý člen postupnosti je 3.
b) Pre každé $n \in N$ $a_{n+2} : a_{n+1} = a_{n+1} : a_n$
c) Súčet všetkých členov postupnosti je 6
d) Postupnosť je nekonečná
e) Pre každé prirodzené číslo n je daná postupnosť a_n
f) Postupnosť je klesajúca

Problém č.2 Určte rekurentnú definíciu tejto postupnosti a súčet prvých 10 členov tejto postupnosti.
a) Prvý člen tejto postupnosti je rovný 1.
b) Druhý člen je rovný 2.
c) Tretí člen postupnosti je 2.
d) Postupnosť je rastúca.
e) Pre každé prirodzené číslo n je daná postupnosť b_n .
f) Súčet dvoch po sebe idúcich členov postupnosti je nasledujúci člen.

Problém č.3 Vypíšte všetky členy danej postupnosti.
a) Postupnosť je konečná.
b) Súčet všetkých členov postupnosti je 92.
c) Rozdiel všetkých susedných členov postupnosti je rovnaký.
d) Daná postupnosť má 8 členov.
e) Súčet prostredných členov postupnosti je 23.
f) Postupnosť je klesajúca.

Problém č. 4 Vymysli postupnosť.
a) Postupnosť má tvar podielu dvoch polynómov
b) Oba polynómy majú rovnaký stupeň
c) Postupnosť má limitu.
d) Postupnosť konverguje k číslu 3.
e) Polynóm v čitateli má stupeň 1.
f) Absolútne členy oboch polynómov sú rovnaké.

5. Výsledky experimentu

Bolo pre mňa príjemným prekvapením, že každý pracoval v skupine velmi aktívne. Každý sa snažil zúčastňovať sa spoločnej práce. Nespozoroval som, žeby pracovala iba časť skupiny.

Problém č.1 – Študenti si mýlili aritmetickú a geometrickú postupnosť. Druhým problémom bol pre nich nájsť súčet geometrického radu.
Problém č.2 – Študenti nemali žiadne problémy s riešením a vypočítali túto úlohu veľmi rýchlo.
Problém č.3 – Študentov prekvapilo, že má úloha viacej riešení. Je to aj dôsledok toho, že sa vo vyučovaní matematiky ešte stále málo využívajú divergentné úlohy. Bolo pekné, že študenti prišli na to, že nielen $a_4 + a_5 = 23$, ale aj $a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = 23$.

Problém č.4 – Aj táto úloha bola divergentná. Študenti našli riešenie pomerne rýchlo. Potom mali problémy nájsť aj iné riešenia, lebo zabudli na vlastnosti limít.

6. Záver

Spomínané problémy sú len malou ukážkou toho, ako možno využiť problémové vyučovanie pri závádzaní pojmov limitných procesov. Ukázali, že je možné využívať problémové vyučovnie aj s celými krúžkami(triedami) študentov, aj v rámci skupinového vyučovania. Súčasťou oboch experimentov bola aj anketa, v ktorej mohli študenti napísať svoje postrehy k vyučovaniu. Viacerým študentkám nevyhovovala koncentrovaná podoba vyučovania a uprednostnili by, keby sa jednotlivé problémy riešili postupne v rámci väčšieho počtu vyučovacích hodín. Experimenty totiž nadväzovali na seba, a preto počas viacerých vyučovacích hodín potrebovali byť študenti intenzívnejšie sústredení.

Viac informácií a zaujímavých problémov k propedeutike limitných procesov možno nájsť aj v [1].

Literatúra:

[1] Eisenmann, P.: Propedeutika diferenciálního a integrálního počtu ve výuce matematiky na střední škole I, II, III, IV, Matematika, Fyzika, Informatika, 1997, č.7, č.8, č.9, č.10 (řada čtyř článků), Praha, Prometheus
[2] Hejný M., Kuřina F.: Dítě, škola a matematika. Praha, Portál 2001
[3] Fulier J.: Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy. Nitra, UKF 2001
[4] Hejný M., Michalcová A.: Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Bratislava, MC 2001
[5]Gavora P.: Úvod do pedagogického výskumu. Bratislava, UK 2001