

Iné číselné sústavy

Mgr. Ján Gunčaga

ABSTRACT: This paper indicates, how other numeration systems can be taught together with interesting problems. The paper mentions ancient numeration systems, decimal numbers and tests for divisibility in other numeration systems.

KEYWORDS: egyptská, babylonská, rímska, grécka číselná sústava, čísla Mayov, zápis desatinného čísla v inej číselnej sústave, znaky deliteľnosti v inej číselnej sústave.

Iné číselné sústavy sa preberajú obyčajne v rámci predmetu Elementárna aritmetika a je možné v tejto časti matematiky nájsť mnohé zaujímavé a motivačné úlohy. V nasledujúcom článku spomenieme aspoň niektoré z nich.

1. Historické číselné sústavy

a) egyptské čísla (hieroglyfické)

Na písanie číslíc používali Egypťania hieroglyfické symboly už okolo roku 3500 pr. Kr. V podstate používali desiatkovú sústavu. Špeciálne symboly používali pre jednotky, desiatky, stovky, ... Niektoré z nich boli tieto:

| ... 1 ∩ ... 10 ② ... 100 ③ ... 1000

Egypťania zapisovali čísla zľava doprava a hodnotu čísla predstavoval súčet hodnôt symbolov, ktoré zoskupovali nasledovne:

③ ②②② ∩∩ |||| 1627

b) čísla Mayov

Mayovia na rozdiel od Egypťanov používali pre čísla väčšie ako 19 pozičnú dvadsiatkovú sústavu, pričom čísla od 1 do 19 zapisovali v nepozičnej päťkovej sústave. Pozície boli zhora nadol, existovali v nich určité nepravidelnosti, čo ukazuje nasledovný príklad:

.	1		..	2. 720
—	5	14 527	⊖	+ 0. 360
⊖	0		—	+ 6. 20
			—	+ 7. 1

c) babylonská číselná sústava

Babylončania po roku 3500 pr. Kr. používali pozičnú šesťdesiatkovú sústavu. Mali iba

$$VVV \ll \frac{VVV}{VV} \ll VV$$

$$3.3600 + 25.60 + 32.1 = 12332$$

dva symboly < pre 10 a $\vee$ pre 1. Číslo 12 332 by zapísali takto:

d) rímske čísla

Predstavujú prechod od nepozičnej číselnej sústavy k pozičnej. Rímske čísla sú pomerne známe, preto ich uvedieme pre zopakovanie:

L.....1 V.....5 X.....10 L.....5 C.....100 D.....500 M.....1000

Symboły boli zapisované od najväčšieho po najmenšie zľava doprava. Hodnota čísla bola súčtom hodnôt všetkých symbolov. Keď Rimania zapisovali čísla 4, 9, 40, 90, 400 alebo 900 používali systém odčítovania: $IV = 5 - 4 = 1$ $IX = 10 - 1 = 9$ $XL = 50 - 10 = 40$

$$XC = 100 - 10 = 90 \quad CD = 500 - 100 = 400$$

$$\text{CM} = 1000 - 100 = 900$$

Symbole boli zapisované od najväčšieho po najmenšie, zľava doprava. Hodnota čísla bola súčtom hodnôt všetkých symbolov.

Příklad: VII 7 DXLIV 544 MCCCXXVIII 1328

e) grécky prínos

Vgréckej matematike pozoruhodný prínos v oblasti pojmu a vlastností prirodzených čísel nachádzame v pytagorejskej škole, ktorá rozdeľovala prirodzené čísla na mužské - nepárne 3, 5, 7, ..., ženské - párne 2, 4, 6, ... a páрно-nepárnu jednotku. Z hľadiska zápisu prirodzených čísel a odvodzovania ich niektorých aritmetických operácií je zaujímavá "aritmetika figurálnych čísel", ktorú je možné zaradiť do učiva predmetu Elementárna aritmetika v príprave budúcich učiteľov I. stupňa ZŠ.

Úlohy na precvičenie:

a) 

b) 

c) $V \ll VVV \quad VVV$

d) MMMCDLXV

1. Nájďte hodnotu nasledovných antických čísel

2. Zapište čísla 532, 64

a) egyptskými čísly

c) babylonskými čísly

b) číslami Mayov

d) rímskymi číslami

2. Dvojková, päťková a iné číselné sústavy

a) zápis kladných desatinných čísel v iných číselných sústavách

Zápis prirodzených čísel v iných číselných sústavách je obvyklá súčasť učiva predmetu Elementárna aritmetika. Preto zápis desatinných čísel v iných číselných sústavách možno považovať za rozširujúce učivo. Spomenieme si len dve z viacerých možností, ako zapisovať desatinné čísla v iných číselných sústavách. Budeme uvažovať len desatinné čísla menšie ako 1, lebo každé kladné desatinné číslo možno zapísať ako súčet prirodzeného čísla a desatinného čísla menšieho ako 1. Tieto čísla budeme v algoritmoch používať v tvare zlomku.

Jeden z možných spôsobov je, že čitateľa a menovateľa zlomku prepíšeme do inej číselnej sústavy a potom čitateľa vydělíme menovateľom v tejto sústave. Ukážeme si to na nasledovnom príklade prepisu čísla $0,09$ do dvojkovej sústavy:

$$0,09 = \frac{1}{11} = 1:11 = 1_2:1011_2 = 0,0001011101_2$$

Ďalší spôsob môže byť nasledovný:

$$\frac{1}{11} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \frac{a_5}{32} + \frac{a_6}{64} + \dots \quad /.16$$

$$\frac{16}{11} = 1\frac{5}{11} = 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 + \frac{a_5}{2} + \frac{a_6}{4} + \frac{a_7}{8} + \dots$$

Pre každé prirodzené číslo i platí, že $a_i = 0$ alebo 1 . Preto $a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1$.

Potom $\frac{5}{11} = \frac{a_5}{2} + \frac{a_6}{4} + \frac{a_7}{8} + \frac{a_8}{16} + \dots$. Teraz znova vynásobíme celú rovnicu niektorým z menovateľov nekonečného radu zlomkov tak, aby sme dostali číslo väčšie ako 1. Aby sme postup urýchlili, rovnicu vynásobíme číslom 16 a dostaneme

$$\frac{80}{11} = 7\frac{3}{11} = 8a_5 + 4a_6 + 2a_7 + a_8 + \frac{a_9}{2} + \frac{a_{10}}{4} + \frac{a_{11}}{8} + \dots \quad \text{Teda}$$

$$a_5 = 0, a_6 = a_7 = a_8 = 1. \text{ Ďalej platí: } \frac{3}{11} = \frac{a_9}{2} + \frac{a_{10}}{4} + \frac{a_{11}}{8} + \frac{a_{12}}{16} + \dots \quad /.4$$

$$\frac{12}{11} = 1\frac{1}{11} = 2a_9 + a_{10} + \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{4} + \frac{a_{13}}{8} + \dots \Rightarrow a_9 = 0, a_{10} = 1 \text{ a dostali sme}$$

$$\frac{1}{11} = \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{12}}{4} + \frac{a_{13}}{8} + \frac{a_{14}}{16} + \frac{a_{15}}{32} + \frac{a_{16}}{64} + \dots \quad \text{Vidíme, že sme sa znova dostali k číslu}$$

$$\frac{1}{11}, \text{ a tak perióda čísla sa skladá z desiatich cifier. Preto } \frac{1}{11} = 0,0001011101_2.$$

b) znaky deliteľnosti v iných číselných sústavách

Najjednoduchšie je vziať si jednu konkrétnu číselnú sústavu a v nej hľadať znaky deliteľnosti. My si ako príklad vezmeme dvanástkovú číselnú sústavu. Najlepšie znaky deliteľnosti vidieť z jej multiplikatívnej tabuľky:

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
2	2	4	6	8	A	10	12	14	16	18	1A
3	3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	5	A	13	18	21	26	2B	34	39	42	47

Adresa autora:
Mgr.Ján Gunčaga
PF KU v Ružomberku
Hrabovská 1
034 01 Ružomberok
e-mail: guncaga@ku.sk