

ALGORITMUS DELENIA

Ján GUNČAGA

Resumé

Tematický celok „Prirodzené čísla, násobenie a delenie prirodzených čísel“ patrí podľa učebných osnov do 4. a 5. ročníka základnej školy. K hlavným zručnostiam, ktoré žiak musí pri jeho preberaní zvládnuť, patrí algoritmus delenia. Často je zvládnutý len povrchno a formálne, čo sa prejavuje aj u budúcich učiteľoch matematiky, ktorí často nevedia, ako by jeho princíp mohli pochopiť ich budúci žiaci. V článku bude predstavený spôsob, ako pri jeho zavedení využiť postupné odčítovanie.

THE ALGORITHM OF DIVISION

Abstract

According to current standards for primary schools, natural numbers and their multiplication and division are taught in the 4th and 5th grades. One of the basic skills each pupil is supposed to master is the algorithm of division. This happens often on a rather formal level. It is our experience that students majoring in mathematical education do not apprehend the related problems of pupils in question. We present and discuss a method based on consecutive subtraction.

1. Úvod

Algoritmus delenia je obvykle preberaný v rámci tematického celku „Prirodzené čísla, násobenie a delenie prirodzených čísel“, ktorý patrí do 4. a 5. ročníka základnej školy. Nielen na Slovensku, ale aj v zahraničí je preberaný často formálne. Jedným z dôsledkov je potom snaha o redukciu tohto učiva v rámci učebných osnov. Napríklad v nemeckej spolkovej krajine Severné Porýnie – Vesfáltsko sa žiaci učia pomocou algoritmu delenia deliť len deliteľom menším ako 20.

Druhým problémom je formálna znalosť algoritmu delenia u budúcich učiteľoch matematiky. Tá sa prejaví najmä, ak majú prezentovať svoju predstavu, ako by tento algoritmus naučili svojich budúcich žiakov. Ich prezentácia môže byť redukovaná len na to, „ako si treba zaškrtnúť číslo, pripísať ďalšie číslo“ a pod. Niektorí z nich majú odvahu aj priznať, že ich ako žiakov týmto spôsobom tento algoritmus naučili, a preto iný spôsob jeho vyučovania nepoznajú.

Má sa toto učivo v dnešnej dobe „kalkulačiek a počítačov“ redukovať alebo dokonca vynechať? Domnievam sa, že správnou cestou je vyučovať ho s porozumením, aby prispel k rozvoju myslenia. Pri algoritme delenia je možné použiť postupné odčítovanie (pozri (2, s. 276 -308)).

2. Úvodné modely

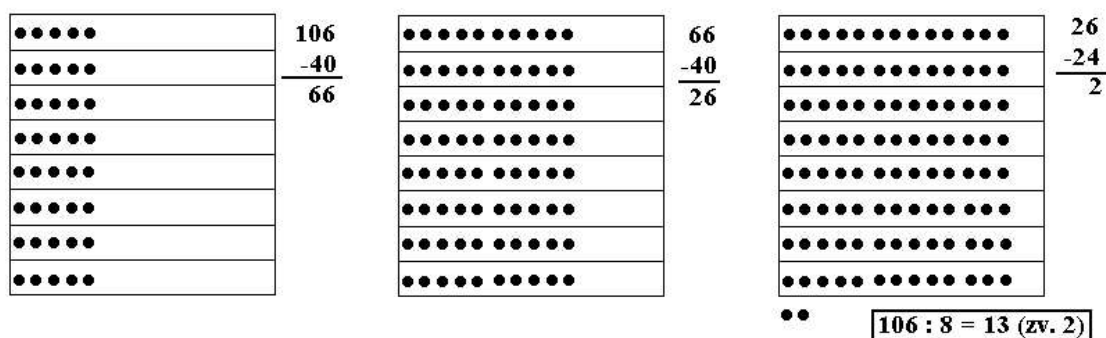
Ako motiváciu môžeme žiakom zadať niekoľko slovných úloh, ktoré navádzajú na delenie, pričom sú riešené pomocou vhodných obrázkov a schém. Jednou z úvodných úloh môže byť úloha na odlievanie:

Úloha 1 Máme sud, v ktorom je 24 litrov vody. Koľkokrát musíme z neho načerpať do štvorlitrového vedra, aby sme z neho vodu vyčerpali?

Úloha 2 Babička kúpila 106 sadeníc paradajok. Chcela by ich vysadiť do 8 riadkov v záhrade. Koľko ich môže vysadiť, aby v každom riadku bol rovnaký počet sadeníc? Ostanú jej ešte nejaké sadenice? Koľko ich bude v jednom riadku?

Riešenie Úlohu môžu riešiť žiaci pomocou schémy, v ktorej si vyznačia 8 riadkov. Potom napríklad bodkami budú znázorňovať jednotlivé sadenice. Po ich rozmiestnení v riadkoch, odčítaním určia zvyšný počet sadeníc, ktoré nám ešte zostali na vysadenie. Toto „rozmiestňovanie“ môžu urobiť aj viackrát dovtedy, kým je to možné. Jedno možné riešenie je na obr. 1

Obr. 1



Učiteľ tu môže položiť otázku, či nie je možný rýchlejší spôsob určenia výsledku. Ak žiaci vedia dobre malú násobilku, napadlo by ich zlúčiť posledné dva kroky z obr. 1 na „66-64=2“. Je možné diskutovať aj o tom ako sa kroky riešenia zmenia, ak sa zmení prvý krok. Naznačiť algoritmus delenia v tomto prípade je možné, ak sa uvedú dva nasledovné kroky: „106 – 80 = 26“, „26 – 24 = 2“.

Na delenie väčších napríklad štvorciferných čísel, možno použiť model „peniaze“, ktorý je použitý v nasledujúcej úlohe.

Úloha 3 Traja bratia Adam, Boris a Cyril spoločne našetrili 4323 Sk. Dohodli sa, že si ich spravodlivo rozdelia. Koľko dostane každý z nich?

Riešenie Model peňazí je vhodné požiť na tomto mieste na využitie zápisu čísla v desiatkovej sústave. $4323 = 4 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$. Jedna možnosť je najprv každému z nich dať po jednej tisícokorunáčke. Oстане 1323 Sk. Ak by sme rozmenili 1000 Sk na 10 stokorunáčiek mali by sme $13 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$ Sk. Teraz by sme každému z bratov mohli dať 4 stokorunáčky a oстане nám ešte rozdeliť $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3$ Sk. Teraz by sme mohli stokorunáčku rozmeniť na 10 desaťkorunáčok a mali by sme $12 \cdot 10 + 3$ Sk. Nakoniec by sme každému z bratov dali po $4 \cdot 10 + 1$ Sk. V tejto fáze by bolo dôležité, aby sa žiaci naučili zapisovať jednotlivé kroky pri postupnom odčítovaní:

4323	
<u>-3000</u>	3. 1000, každý z bratov dostane 1000 Sk
1323	
<u>-1200</u>	3. 400, každý z bratov dostane 400 Sk
123	
<u>-120</u>	3.40, každý z bratov dostane 40 Sk
3	
<u>-3</u>	3 .1, každý z bratov dostane 1 Sk
0	každý z bratov spolu dostane 1441 Sk

Ďalšou výhodou tohto spôsobu riešenia je, že si žiaci precvičia aj platnosť distributívneho zákona: $4323 = 3 \cdot (1000 + 400 + 40 + 1)$.

3. Kalkulatívne úlohy

V tejto fáze môže učiteľ zadať abstraktnejšie, čisto kalkulatívne úlohy, na ktorých je možné precvičiť postupné odčítovanie a zaviesť algoritmus delenia.

Úloha 4 Vypočítajte $12\ 321 : 8 =$

Riešenie

$12\ 321$	
$\underline{-8\ 000}$	8. 1000
4 321	
$\underline{-4\ 000}$	8. 500
321	
$\underline{-320}$	8. 40
1	

$$12\ 321 : 8 = 1540 \text{ (zv. 1)}$$

Žiaci môžu odčítavať aj v iných krokoch, ale k horeuvedenému algoritmu ich môže učiteľ priviesť ako k „*racionalizovanému odčítovaniu*“. Ak sa takéto odčítovanie precvičí na viacerých príkladoch, „klasický“ algoritmus delenia je len skrátaná forma zápisu postupného odčítovania. Predchádzajúca úloha by vyzerala nasledovne:

$12\ 321 : 8 = 1540$	alebo	$12\ 321 : 8 = 1540$
$\underline{-8}$		43
43		32
$\underline{-40}$		01
32		1
$\underline{-32}$		
01		
$\underline{-0}$		
1		

Osobitne problematické pre žiakov sú úlohy, v ktorých podiel je číslo, ktoré má striedavo nulové a nenulové cifry. Problémy pri algoritme delenia možno riešiť návratom k postupnému odčítovaniu.

$9152 : 3 = 350$ (častá chyba)	Postupné odčítovanie: 9152
$\underline{-9}$	$\underline{-9000}$ 3. 3000
15	152
02	$\underline{-150}$ 3. 50
	2
	$9152 : 3 = 3050$ (zv. 2)

2)

Ak sa algoritmus delenia nazavádza pomocou modelov, učiteľ je v situácii, keď sa pri problémoch žiakov s jeho pochopením a používaním nemá kam vrátiť, na nižšiu úroveň jednoduchšiu pre žiaka.

4. Gerbertov algoritmus delenia

V histórii matematiky sa vyskytli viaceré jednoduchšie alebo zložitejšie algoritmy delenia. Ako zaujímavosť môže učiteľ žiakom ukázať jeden z najstarších

známych algoritmov delenia, ktorý pochádza od *Gerberta*. Podľa (4, s.134) vznikol okolo roku 980. Je výhodný najmä pre delenie jednociferným deliteľom „blízkym“ číslu 10.

V prvom kroku by sa žiaci naučili deliť číslom 10. Pomocou vhodných obrázkov a schém by prišli na to, že pri delení číslom 10 posledná cifra určuje zvyšok a všetky ostatné podiel delenia. Napríklad $4562 : 10 = 456$ (zv. 2). Úlohu 2 z tohto článku by bolo možné pomocou Gerbertovho algoritmu znázorniť tak, že by babička sadenice umiestňovala do 8 riadkov a 2 debničiek tak, aby v každom riadku a debničke by bol rovnaký počet sadeníc. Podstatou tohto algoritmu je to, aby počet riadkov a debničiek bol spolu 10. Keďže žiaci už vedľa rýchlo deliť číslom 10, tak by určili, že v každom riadku a debničke by bolo po 10 sadeníc, zvýšilo by 6 sadeníc. Sadenice z debničiek by sme pridali k tým šiestim, ktoré zvýšili. Mali by sme 26 sadeníc. Do riadkov a debničiek by sme dali po 2 sadenice a znova by ostalo 6 sadeníc. Teraz 4 sadenice z debničiek by sme pridali k tým 6 sadeniciam a mali by sme 10 sadeníc. Tie by sme rozdelili po jednej sadenici v každom riadku a debničke. V každom riadku by sme mali po 13 sadeníc a v každej debničke by bola jedna sadenica. Dve sadenice z debničiek by tvorilo zvyšok a 13 sadeníc v riadku podiel. Tento výpočet by sme mohli zapísať takto:

$$106 : 8 = 106 : (10 - 2) = 10 + 2 + 1$$
$$\begin{array}{r} 6 \\ +20 \\ \hline 26 \\ 6 \\ +4 \\ \hline 10 \\ 0 \\ +2 \\ \hline 2 \end{array}$$

Pri zautomatizovaní tohto algoritmu by výpočet úlohy 4 vyzeral nasledovne:
 $12\ 321 : 8 = 12\ 321 : (10 - 2) = 1232 + 246 + 49 + 10 + 2 + 1 = 1\ 540$ (zv. 1)

$$\begin{array}{r} 1 \\ +2464 \\ \hline 2465 \\ 5 \\ +492 \\ \hline 497 \\ 7 \\ +98 \\ \hline 105 \\ 5 \\ +20 \\ \hline 25 \\ 5 \\ +4 \\ \hline 9 \text{ (v poslednom kroku je jednoduchšie } 9 : 8 = 1 \text{ zv. 1) } \\ \text{zv. 1} \end{array}$$

V tomto príklade je možné výpočet ukončiť skôr, napríklad $25 : 8 = 3$ zv. 1.

Kryštalizáciu a automatizáciu algoritmu delenia je vhodné uskutočniť formou slovných úloh. Možno ich nájsť v učebniciach, napríklad v (1, s. 69 – 71)

5. Závěr

Algoritmus delenia je možné žiakom priblížiť aj inými spôsobmi, ako je to popísané v tomto článku. Pri preberaní tohto učiva je z uvedených úloh zrejmé, že je potrebné dodržať etapy poznávacieho procesu uvedené v (3, s. 23). Úlohy 1 a 2 možno považovať za separované modely v poznávacom procese algoritmu delenia. Tie môže učiteľ použiť ako vhodnú pomôcku najmä vtedy, ak sa žiaci dopúšťajú numerických chýb pri delení.

Gerbertov algoritmus je jedným z viacerých historických algoritmov delenia, ktoré môže použiť učiteľ na motiváciu žiakov alebo na overenie toho, či žiaci chápu hlbšie alebo formálne zmysel algoritmu delenia.

V súčasnosti existuje istý tlak na redukciu učiva algoritmu delenia v dôsledku používania kalkulačiek a počítačov. Použitie modelov, motivácie, príkladov algoritmov z histórie matematiky môže napomôcť odôvodniť oprávnenosť vyučovania algoritmu delenia na základných školách ako prostriedku na rozvoj logického myslenia a všeobecného vzdelania žiakov.

Literatúra

1. BERO, P. a PYTLOVÁ Z. *Učebnica Matematika pre 4. ročník ZŠ*. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 1999. 80 s. ISBN 80-7158-231-x
2. EICHOLZ E. R. A KOL. *Investigating School Mathematics*. Ontario : Addison-Wesley Ltd., 1973. 366 s. ISBN 0 – 201 – 01123 - 9
3. HEJNÝ, M. A KOL. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990. 560 s. ISBN 80-08-01344-3
4. SMITH, D. E. *History of mathematics. Vol. II*. New York: Dover Publications, Inc., 1958. 725 s. ISBN 0-486-20430-8

Kontaktní adresa:

*PaedDr. Ján Gunčaga
Katedra matematiky a fyziky
Námestie Andreja Hlinku 56
034 01 Ružomberok
Slovensko
Telefon: +421/44/4320961
E-mail: guncaga@pobox.sk*