

LIMITA A DERIVÁCIA FUNKCIE – UKÁŽKA KVANTITATÍVNEHO VÝSKUMU

Ján Gunčaga

The present paper is devoted to a qualitative research related to teaching basic calculus at High School. We study suitable factors characterizing skills needed to solve examples with limits and derivatives. Two hypotheses concerning their mutual relationships are tested by statistical methods.

1 Úvod

Pojmy *limita a derivácia funkcie* patria k ťažiskovým pojmom tematického celku *Diferenciálny počet* preberaného v prvom polroku 4. ročníka gymnázia. Tento tematický celok využíva viaceré poznatky žiakov, ktoré žiaci získali počas vyučovania matematiky v predchádzajúcich ročníkoch. Za účelom vyhodnotenia previazanosti poznatkov prebiehal kvantitatívny výskum, ktorý prebiehal v novembri 2003. Bol realizovaný u žiakov 4. ročníka Gymnázia sv. Andreja a študentov 1. ročníka učiteľstva matematiky na Pedagogickej fakulte Katolíckej Univerzity v Ružomberku. Experimentálnu vzorku tvorilo spolu 57 žiakov a študentov.

2 Ciele a hypotézy výskumu

Na základe skúseností z kvalitatívneho výskumu, ktorý prebiehal v predchádzajúcom školskom roku boli vtypované vstupné faktory, ktoré môžu ovplyvňovať výkon žiakov pri preberaní pojmov *limita a derivácia funkcie*. Faktory boli nasledovné: L – logický faktor, AV- algebrické výrazy, CV – číselné výrazy, N – nerovnice. Hodnoty faktorov určoval počet bodov získaných za jednotlivé úlohy vstupnej previerky, ktorá bola zadaná žiakom na začiatku výskumu. Ako ukážku uvedieme úlohy na faktory AV, CV, N:

1.(AV) Zjednodušte nasledovné výrazy a určte aj podmienky:

$$\text{a) } \frac{u^2 - 25}{u + 5} \quad \text{b) } \frac{u^3 - 27}{u - 3} \quad \text{c) } \left(\frac{u^2 - 25}{u + 5} + \frac{u^3 - 27}{u - 3} \right) : (u + 2) \quad \text{d) }$$

$$\left(\frac{u^3 \frac{1}{v^3}}{\frac{2}{u^3 v^3}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

2.(CV) Upravte nasledovné číselné výrazy a odstráňte zlomok, ak je to možné.

$$\text{a) } \left(\frac{3^3 + 6^3}{3^3} \right)^2 \quad \text{b) } \left(\frac{3^j + 6^j}{3^j} \right)^2 \quad \text{c) } \left(\frac{4^2 16^{\frac{1}{3}}}{\frac{3}{4^2 16^3}} \right)^{\frac{4}{3}}$$

3.(N) Riešte v R sústavu nerovnic

a) $3x + 7 < x - 2 < 4x + 3$ b) $4x + 1 < 2x + 4 < 5x + 9$

Za úlohu 1 bolo možné získať 13 bodov, za úlohu 2 7 bodov a za úlohu 3 10 bodov.

Bodové hodnotenie týchto úloh bolo ohodnotením faktorov AV, CV a N.

Po prebraní tematického celku derivácia a limita funkcie, bola žiakom zadaná záverečná písomná práca. Jej úlohy je možné rozdeliť na dve základné skupiny:

1. úlohy zamerané na premýšľanie a uvažovanie nad prebranými pojmami.
2. kalkulatívne úlohy.

V tomto príspevku sa zameriame na kalkulatívne úlohy. Ich zadanie bolo nasledovné:

1. Doplňte predpis pre funkciu $f(x)$, aby bola v bode 3 spojitá. Zdôvodnite svoju odpoveď

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3} & \text{pre } x \neq 3 \\ \dots\dots\dots & \text{pre } x = 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{pre } x \neq 3 \\ \dots\dots\dots & \text{pre } x = 3 \end{cases}$

2. Vypočítajte

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 - 12}{x - 2} + \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ c)

3. Nájdite všeobecnú rovnicu priamky, ktorá je dotyčnicou ku krivke $y = x^3$ v bode $T[-2, -8]$.

4. Vypočítajte deriváciu funkcie f , ak

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$ b) $f(x) = (x+2)^2$ c) $f(x) = x(x - 3)(x + 3)$

Bodové hodnotenie týchto úloh bolo nasledovné:

Úlohy 1a,b: každá maximálne 2 body

- za správne zdôvodnenie alebo výpočet - 1 bod
- za správnu odpoveď - 1 bod

Úloha 2a: maximálne 3 body

- správna úprava výrazov v prvom zlomku - 1 bod
- správna úprava výrazov v druhom zlomku - 1 bod
- za správny výsledok - 1 bod

Úlohy 2b, 2c: každá maximálne 2 body

- správna úprava výrazov v zlomku - 1 bod
- za správny výsledok - 1 bod

Úloha 3: maximálne 4 body

- za správny výpočet derivácie funkcie - 1 bod
- za správny výpočet smernice dotyčnice - 1 bod
- za správny smernicový alebo iný tvar rovnice dotyčnice, ktorý vedie k správne výsledku - 1 bod
- za správny výsledok - 1 bod

Úloha 4a: správna odpoveď 1 bod

Úlohy 4b, 4c: každá maximálne 2 body

- správna úprava výrazu - 1 bod

- za správny výpočet derivácie funkcie - 1 bod

Za tieto úlohy mohol žiak získať spolu maximálne 20 bodov a tento súčet bol zároveň ohodnotením faktora skupiny kalkulatívnych úloh SKal. Analogicky sa postupovalo aj v prvej skupine úloh a získala sa hodnota faktora skupiny úloh zameraných na premýšľanie a uvažovanie nad prebranými pojmami SPr (maximálne 22 bodov).

Počas experimentálnych vyučovacích hodín bolo kvalitatívne zistené, že vplyvom riešenia úloh na limitu a deriváciu funkcie sa zlepšili schopnosti žiakov vo faktoroch AV a N. Preto na konci preberania tematického celku museli byť tieto faktory znova odmerané, a tak boli získané ich aktualizované hodnoty AV1 a N1.

Jedným z cieľov štatistického výskumu bolo zistiť, ako vplyvajú faktory L, AV1, CV a N1 na faktory SPr a SKal. Z formulovaných pracovných hypotéz sa zameriame na nasledovné hypotézy:

H1a: Faktory AV1, CV, SKal sú nezávislé.

H1b : Faktory AV1, CV vplyvajú na faktor SKal.

H2a: Stredné hodnoty dvojíc faktorov AV, AV1 a N, N1 sú rovnaké.

H2b: Stredná hodnota faktora AV1 je väčšia ako stredná hodnota faktora AV a stredná

hodnota faktora N1 je väčšia ako stredná hodnota faktora N.

3 Overenie hypotéz

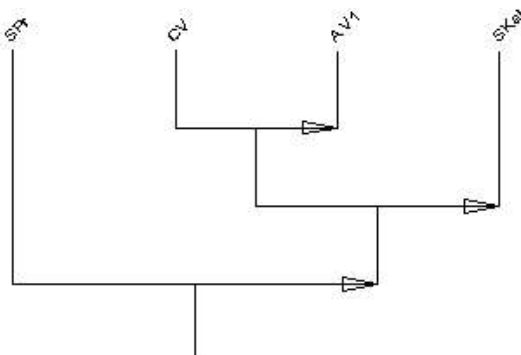
Hypotézy H1a, H1b overíme najskôr pomocou korelačnej matice faktorov AV1, CV a SKal. Pomocou programu *Excel* získame:

Tabuľka 1

	AV1	CV	SKal
AV1	1		
CV	0,423428	1	
SKal	0,631208	0,485132	1

Podľa hodnôt korelačných koeficientov je možné hypotézu H1a zamietnuť. Platnosť alternatívnej hypotézy H1b okrem korelačnej matice podporuje zhlukovací implikatívny dendrogram medzi nameranými hodnotami faktorov AV1, CV, SPr a SKal získaný pomocou programu *CHIC*:

Obrázok 1



Hypotézu H2b dokážeme pomocou zamietnutia hypotézy H2a. Hypotézu zamietneme použitím dvojjvýberového párového t-testu na strednú hodnotu. Pomocou programu *Excel* dostaneme:

Tabuľka 2

	AV	AV1	N	N1
Stredná hodnota	8,491228	9,947368	6,754386	8,736842
t stat	-4,4219		-4,82445	
P(T<=t) (1)	2,28. 10 ⁻⁵		5,6.10 ⁻⁶	
t krit (1)	1,672522		1,672522	

V oboch t – testoch je absolútna hodnota čísla t stat väčšia ako kritická hodnota t krit (1) , preto na hladine významnosti 0,05 zamietame hypotézu o rovnosti stredných hodnôt faktorov AV a AV1, N a N1. Teda platí alternatívna hypotéza H2b. Preto zvýšenie hodnoty faktora AV na AV1 a faktora N na N1 je štatisticky významné.

4 Záver

Uvedené štatistické výsledky dokazujú, že úspešnosť žiakov pri riešení kalkulatívnych úloh je podmienená schopnosťou upravovať algebrické a číselné výrazy.

Pri preberaní pojmov limita a deriváciu funkcie sa zároveň zlepšujú schopnosti žiakov upravovať algebrické výrazy a riešiť nerovnice. To dáva šancu žiakom, ktorí tematické celky nerovnice a algebrické výrazy nezvládli, aby potrebné poznatky si doplnili pri preberaní pojmov limita a deriváciu funkcie. Použitie štatistických metód uvedených v tomto článku možno nájsť aj v (Scimone, 2002) a (Wimmer, 1993).

Literatúra

SCIMONE A.: Pupils' conception about an open historical question: Goldbach conjecture. The improvement of mathematical education from a historical viewpoint. Bratislava : MFF UK, 2002. 113 s. - Dizertačná práca.

WIMMER G.: Štatistické metódy v pedagogike. Hradec Králové : Gaudeamus, 1993.
154 s. ISBN 80-7041-864-8

Adresa

PaedDr. Ján Gunčaga
Katedra matematiky a fyziky
Pedagogická fakulta KU
Námestie A. Hlinku 56
034 01 Ružomberok

Recenzent: Doc. RNDr. Roman Frič, DrSc.