Ján GUNČAGA, Ružomberok

Zum Thema Folgen und Reihen

Das angesprochene Thema wird den Lehrplänen der slowakischen Gymnasien entsprechend zu Beginn des letzten Studienjahrgangs unterrichtet. Leider wird bei uns dieses Thema durch viele Lehrer als sehr uninteressant dargestellt. Das Problem liegt darin, dass sie wichtige Regeln des Erkenntnisprozesses nicht beachten.

M. Hejný gibt in [1], [2] 6 Etappen des Erkenntnisprozesses vor:

1. Motivation: Diese Einleitungsphase ist sehr wichtig, weil Sie ,,Motor" des Erkenntnisprozesses ist. Der Schüler ist fähig ein Problem, das für ihn interessant ist, leichter zu lösen. Deshalb entsteht die Sehnsucht nach Erkenntnis und Erfahrung in bestimmten Lernbereichen in der Psyche der Schüler.

2. Die Schaffung „separierter Modelle“: Der Schüler löst ein Problem durch verschiedene „separierte Modelle“. Dank dieser erwirbt er neue Erfahrungen. Zuerst sieht er keine Zusammenhänge zwischen diesen Erfahrungen. Bei der Arbeit mit den Modellen erreicht er durch Strukturierung und Klassifikation der Erfahrungen ein Universalmodell. Dieses Modell kann die separierten Modelle vertreten oder ersetzen.

3. Das „Universalmodell“: Dieses Modell zeigt die wichtigsten Eigenschaften der separierten Modelle und umfasst sie. Durch die Arbeit mit diesen kann der Schüler neue Erkenntnisse entdecken. Dieser Übergang im Bewusstsein des Schülers, im Moment der Entdeckung der Erkenntnis, wird Abstraktionshebung genannt.

4. Entstehung von Kenntnissen: Neue Erkenntnisse, Begriffe, Beziehungen oder Abhängigkeiten zwischen Phänomenen werden dann in sich geschlossen und selbständig. Der Schüler bestätigt die Richtigkeit der neuen Erkenntnisse an den benutzten Modellen.

5. Kristallisierung: Während dieser Etappe bringt der Schüler die neuen Erkenntnisse in eine Erkenntnisstruktur. Außerdem weitet er die Möglichkeiten zu neuen Erkenntnissen aus. Dazu löst er verschiedene Probleme, die mit diesen neuen Erkenntnissen zusammenhängen.

6. Automatisierung: Der Schüler benutzt automatisch seine neuen Kenntnisse bei der Lösung verschiedenen Aufgaben und Probleme. In dieser Etappe braucht er keine Modelle mehr aus den vorhergehenden Phasen.

Dieser Mechanismus geht aus dem Schema **Motivation → Erfahrungen → Erkenntnis** hervor. Im Unterricht zum Thema „Folgen und Reihen“ wird dieser Mechanismus oft nicht beachtet. Deshalb existiert bei den Schülern ein starker Formalismus, ihre Kreativität wird daher weniger entwickelt.

Das konnte ich in einer kleinen Untersuchung beobachten. Sie wurde im September 2000, an einem kirchlichen Gymnasium in Ružomberok, in einer Gruppe mit 31 Studierenden durchgeführt. Ich legte das Thema „rekursiv definierte Folgen“ vor. Dieses kann man interessanter Weise anhand von Aufgaben aus den IQ Testen beginnen.

Beispiel 1. Finden Sie nächste Zahl, die fehlt!

a) 1, 3, 6, 10, 15, ? b) $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{6}, \frac{16}{24}, \frac{32}{120}, ?$

Der italienische Mathematiker Leonardo Fibonacci (1170–1250) löste im Jahre 1220 folgende Aufgabe: Wie viele Kaninchenpaare werden im einem Jahr geboren, wenn wir mit einem neu geborenen Paar beginnen? Jedes Paar ist vom zweitem Monat seines Lebens an fruchtbar, wenn in jedem Monat ein neues Paar geboren wird.

Diese Aufgabe gab ich meinen Studierenden. Jeder löste diese Aufgabe nach seiner eigenen Idee. Ich war überrascht, dass keiner diese Aufgabe auf natürliche und spiellustigen Art und Weise löste. Nur zwei Studierende haben einige Kaninchen gemalt. Bei acht Studierenden lag der Fehler darin, dass sie die Folge der Anzahl der Kaninchenpaare $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ angaben. Vier Studierende notierten die Folge so: $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$. Diese Kaninchenpaare bezeichneten die meisten Studierenden mit Buchstaben oder mit der Nummer 1. Die erste richtige Lösung war:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
X	XX	XY	XZ XXZ	XA XXA XYA	XB XXB XYB XZB XXZB
1	1	1	2	3	5

7	**8**	**9**	**10**				
							144
8	13	21	34	55	89	144	89
5							**233**

Man kann sehen, dass dieser Studierende sich um zwei Monate verrechnete. Die komplizierte Notation zeigt, dass er keine passende separierte oder universale Modelle benutzt konnte.

Die erste Aufgabe für den Mathematiklehrer besteht nun darin, den Studierenden zu zeigen, wie man bei der Lösung verschiedener Probleme passende separierte und konkrete Modelle anwenden kann.

Wir müssen uns die Frage stellen, ob der Mathematikunterricht unsere Schüler oder Studierenden nicht deformiert und deren Kreativität vernichtet. In der Tat lernen Schüler oft nur formales Wissen und weniger denken und überlegen.

I. Kluvánek stellt zum Thema „Folgen und Reihen“ in [4] viele interessante Aufgaben vor. Als erstes Beispiel zeige ich eine Aufgabe, in der wir die „vollständige Induktion“ anwenden können. Dieses Beispiel habe ich auch in meiner Untersuchung benutzt. In der Slowakei wird die vollständige Induktion vor allem in Aufgaben über die Teilbarkeit benutzt. Leider kommt die vollständige Induktion in anderen Teilen der Mathematik nur selten vor!

Beispiel 2. Finden Sie die Vorschrift für das Glied b_n, wenn

$$b_1 = 0, b_k = \frac{1}{2 - b_{k-1}}, \text{ wenn k = } 2, 3, 4, \ldots$$

Beweisen Sie die Vorschrift mit Hilfe der vollständigen Induktion!

Wenn wir die ersten Folgeglieder rechnen, können wir die Hypothese $b_n = \frac{n-1}{n}$ finden! Es waren nur zwei Studierende, die diese Vorschrift entdeckt haben, keiner von ihnen hat den Beweis durchgeführt! Bei fünf Studierenden war die Hypothese $b_n = \frac{n+1}{n+1}$. Sie stellten intuitiv fest, dass diese Vorschrift der Form eines Bruches entspricht, sie konnten aber die richtige Form des Nenners und Zählers nicht finden. Ich erklärte den Beweisvorgang dann der ganzen Klasse. Dabei versuchte ich, die Studierenden durch verschiedene paradoxe Vorgaben zu motivieren!

Dazu habe ich ein Beispiel aus [1] ausgewählt:

Beispiel 3.

$$X^{X^{X^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2 \qquad X^{X^{X^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 4$$

$$X^2 = 2 \qquad X^4 = 4$$

$$X = \sqrt{2} \qquad X = \sqrt{2} \qquad \text{Ist } 2 = 4?$$

Lösung: Das erste Problem besteht darin, zu wissen, was $X^{X^{X^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ bedeutet.

Ergibt sich eine Folge $X, X^X, \left(X^X\right)^X = X^{X^2}, \ldots$ oder $X, X^X, X^{\left(X^X\right)}$, ?

Das Zeichen $X^{X^{X^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ hat keine Bedeutung. Besser ist es, diese Aufgabe umzuformulieren: Welchen Grenzwert hat die Folge:

$a_1 = \sqrt{2}, a_n = \left(\sqrt{2}\right)^{a_{n-1}}$ für n = 2, 3, 4,…?

Dank der vollständigen Induktion können wir beweisen, dass $\forall n \in N; a_n <$ < 2. Für n=1 es gilt. Wenn $a_k < 2$ eine induktive Vorraussetzung ist, dann $\sqrt{2}^{a_k} < \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow a_{k+1} < 2$.

Weiter gilt: wenn $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{a_{n-1}} = \left(\sqrt{2}\right)^a$, bekommen wir die Gleichung $a = \left(\sqrt{2}\right)^a$ mit zwei Lösungen a = 2, a = 4. Weil $\forall n \in N; a_n < 2$, ist die Lösung a = 4 falsch und $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Weitere interessante Beispiele zu diesem Themenbereich und zum Bereich des Begriffs der „Funktion“ kann man bei Fulier [3] finden.

Literatur

[1] Hejný M. und Koll.: *Teória vyučovania matematiky 2 (Theorie des Mathematikunterrichts 2)*. Bratislava, SPN 1990

[2] Hejný M., Hejný V.: *Prečo je matematika tak ťažká (Warum ist die Mathematik so schwer),* in: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie (Fortschritte der Mathematik, Physik und Astronomie),* XXIII/1978, Seite 85 – 93

[3] Fulier J. : *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy (Funktionen und Funktionsdenken im Analysisunterricht).* Nitra UKF 2001

[4] Kluvánek I.: *Prípravka na diferenciálny a integrálny počet(Vorbereitung zur Differential- und Integralrechnung 1).* Žilina, VŠDS 1991