

Ján GUNČAGA, Ružomberok

Lernsequenz zum Thema Summe einer unendlichen geometrischen Reihe

Dieses Thema wird den Lehrplänen der slowakischen Gymnasien entsprechend zu Beginn des letzten Studienjahrgangs unterrichtet. Leider wird bei uns dieses Thema durch viele Lehrer ohne Propädeutik dargestellt.

Deshalb erreichen viele Studenten die neue Kenntnisse nur in der formalen Ebene, weil sie sich mit keinen separierten Modellen getroffen haben. Das war für mich ein Impuls einen Lehrtext zum Thema Summe einer unendlichen geometrischen Reihe auszuarbeiten.

In diesem Lehrtext möchte ich einige mögliche separierte Modelle darstellen. Ich habe diesen Lehrtext auch in einer Klasse des Gymnasiums probiert. In diesem Artikel möchte ich einige Beispiele, die ich benutzt habe, vorstellen und auch einige Reaktionen der Studenten beschreiben.

Im Rahmen der Propädeutik habe ich mit diesem Beispiel begonnen.

Beispiel 1. Mit dem Taschenrechner habe ich $1:3 = 0,3333333$ gerechnet. Das Ergebnis habe ich sofort mit 3 multipliziert. Der Taschenrechner hat das Ergebnis 0,9999999 gezeigt. Existieren auch Taschenrechner, die Ergebnis 1 zeigen. Ist $0,9999999 = 1$? Sind diese Taschenrechner besser? Wenn $x = 1:3$, ist $3x = 1$? Warum? Ist $0,9999999\dots=1$?

Es gibt zwei Typen der Taschenrechner. Ein Typ rechnet den Wert der Zahl und wenn sein Dezimalbruch zu lang ist, dann der Taschenrechner "schneidet" die Teil, die übergriffen ist. Diese Taschenrechner zeigen das Ergebnis 0,9999999. Zweite Typ des Taschenrechners (vor allem wissenschaftliche Taschenrechner) rechnet im Dezimalbruch der Zahl auch einige Stelle, die nach der letzten Zahl des Displays folgen. Diese Zahlen benutzt der Taschenrechner bei Runden des Ergebnis an so viel Stellen, wie viel der Display hat.. Diese Taschenrechner geben das Ergebnis 1.

Was bedeutet die Schreibweise $0,9999999\dots= 0,\overline{9}$? Das ist klar, das zum Beispiel $5342 = 5.1000 + 3.100 + 4.10 + 2$. So auch

$$0,\overline{9} = 9.0,1 + 9.0,01 + 9.0,001 + \dots = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^i$$

Sind die Nummer $0,\overline{9}$ und 1 gleich oder verschieden? Dazu hilft uns der nächste Beispiel.

Beispiel 2. Achilles, der Held des Kriegs in Troja, hat mit Schildkröte im Laufwettbewerb gelaufen. Er hat der Schildkröte einen Vorsprung-ein Kreis gegeben. Achilles läuft 10 mal schneller. Wenn Achilles hat ganzen Kreis gelaufen, Schildkröte hat $\frac{1}{10}$ des Kreises gelaufen. Wenn Achilles läuft diese $\frac{1}{10}$, Schildkröte $\frac{1}{100}$ usw. Deshalb Achilles kann die Schildkröte nie einholen.

Dieser Beispiel ist von dem Philosophen Zeno (496- 429 vor Chr.)bekannt.

Setzen wir voraus, dass die Geschwindigkeiten von Achilles v_a und Schildkröte v_k konstant sind und beide sind in die gleiche Richtung bewegt. Stellen wir vor, dass ein Kreis 100 m lang ist und weil Schildkröte 10 mal langsamer ist, so gilt $v_k = 0,1 v_a$.

Wenn Achilles 100 m gelaufen hat, Schildkröte 10 meter. Wenn Achilles diese 10 m gelaufen hat, Schildkröte 1 meter usw. Wenn Achilles die Schildkröte einholen, muss er diese Entfernung

$$s = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 111 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i \text{ laufen.}$$

Diese Entfernung ist natürlich Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem ersten Glied 100 und Quotient $\frac{1}{10}$. Philosoph Zeno konnte sich nicht vorstellen, dass diese Summe eine endliche Zahl ist.

Diese Aufgabe kann man auch mit Kenntnissen über Bewegungsaufgaben lösen. Wenn die Geschwindigkeit von Achilles v_a und Geschwindigkeit von Schildkröte $0,1v_a$ und t ist die Zeit, wann sie sich miteinander treffen, dann gilt $v_a t = 100 + 0,1v_a t$. Achilles ist Entfernung $s = v_a t$ gelaufen. Deshalb $s = 100 + 0,1s$ und $s = \frac{100}{1-0,1} = \frac{1000}{9}$.

Jetzt können wir zum Beispiel 1 zurückkehren. Wir haben gerade gerechnet, dass $\frac{1000}{9} = 111 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i$. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = \frac{1000}{9} - 111 = \frac{1}{9}.$$

Wir benutzen jetzt das Ergebnis aus dem Beispiel 1.

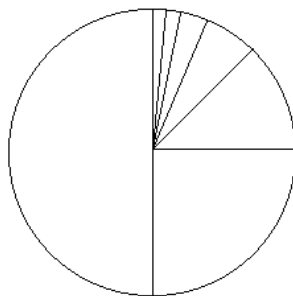
$$0,\bar{9} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Wir haben auch gerechnet, dass Summe einer unendlichen geometrischen Reihe mit dem ersten Glied 100 und Quotient $\frac{1}{10}$ ist $\frac{1}{9}$.

Wenn wir teilen die Schokolade so, dass dem ersten Mensch geben wir eine Hälfte, dem zweiten einen Viertel usw., wir können teilen diese Schokolade

ohne Ende. Es gilt nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Das ist mit dieser

Abbildung zeigen.



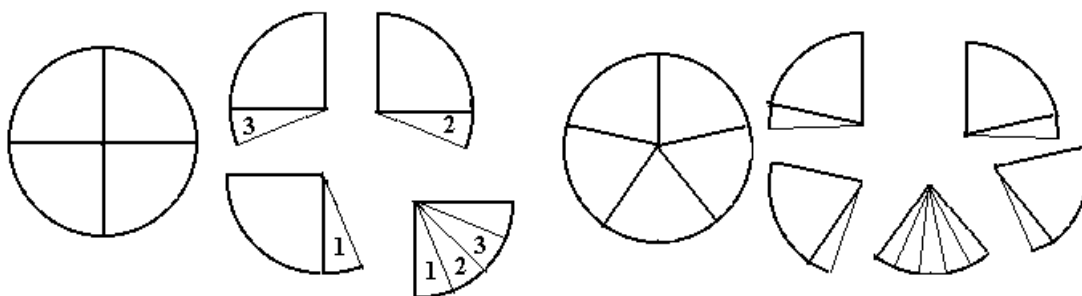
Dieses „Tortenmodell“ kann man auch für andere geometrischen Reihen benutzen. Diese Aufgabe haben Studenten als Hausaufgabe bekommen und

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \dots = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{1}{n-1}$$

einige haben auch die letzte Gleichung gefunden.

So haben wir Summe unendlichen geometrischen Reihe mit Quotient



$\frac{1}{n} (n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2)$ gefunden. Dieses Ergebnis kann man mit einem geometrischen Modell (siehe in [3]) für geometrischen Reihen mit Quotient

$0 < q < 1$ verallgemeinern und bekommen wir $s = \frac{a_1}{1-q}$. Für den Fall $-1 < q$

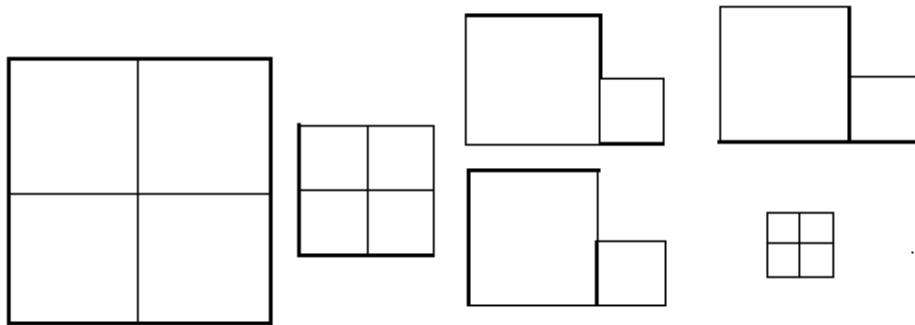
< 0 benutzen wir Substitution $p = -q$. Summe dieser geometrischen Reihe kann man verstehen als Summe zwei unendlichen geometrischen Reihen. Erste Reihe (gerade Glieder) hat positive Glieder und zweite (ungerade Glieder) hat negative Glieder und

$$s = \frac{a_1}{1-p^2} + \left(-\frac{a_1 p}{1-p^2} \right) = \frac{a_1(1-p)}{1-p^2} = \frac{a_1}{1+p} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Bemerkungen aus Unterricht

Die Studenten verstehen, dass Vielfache von periodischem Dezimalbruch ist wieder periodischer Dezimalbruch. Am Anfang meinen fast alle Studenten, dass $0,\bar{9} < 1$. Nach dem Beispiel 2 habe ich Studenten gefragt, warum ist eigentlich $0,\bar{9} = 1$? Eine Antwort von Studenten war, weil Achilles hat die Schildkröte eingeholt. Hier kann man sehen, dass Studenten eine intuitive Vorstellung über Grenzwertprozesse bei Summe einer unendlichen Reihe bekommen. Nur im diesen Fall ist passend zum Schritt der Verallgemeinerung weiterzugehen.

Ich habe diesen Lehrtext auch mit einer Gruppe von zukünftigen Grundschullehrer. Eine Hälfte der Studenten hat statt den „Tortenmodell“ einen „Quadratmodell“ benutzt.



Diese Modelle sind separierte und universale Modelle im Sinn der Theorie des Kenntnissprozesses (siehe [1], [2]). Sie können Studenten zu tieferen Verständnis der Grenzwertprozessen bei dem Begriff Summe einer unendlichen geometrischen Reihe helfen. Andere Modelle kann man auch bei Eisenmann in [4] finden.

Literatur

- [1] Hejný M. und Koll.: *Teória vyučovania matematiky 2 (Theorie des Mathematikunterrichts 2)*. Bratislava, SPN 1990
- [2] Gunčaga J.: *Zum Thema Folgen und Reihen*, In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2002, Seite 203 – 207
- [3] Bindl A.: *Geometrischen Reihen an der 9. Klasse*. In: *Praxis der Mathematik*, Heft 3, 1999, Seite 158 - 162
- [4] Eisenmann P.: *Propedeutika infinitezimálního počtu (Propädeutik des Infinitesimalrechnens)*. Ústí nad Labem, UJEP 2002