ZAVEDENIE LIMITY A DERIVÁCIE FUNKCIE V BODE

JÁN GUNČAGA

ABSTRACT. The present paper deals with teaching basic calculus at the secondary level. First, we present a method how to introduce the notions of a limit and a derivative using continuity of a function as a prime notion. The second part is devoted to a qualitative analysis of the method. We analyze some pupils' solutions of problems related to limits and derivatives and evaluate the method.

Tematické celky limita funkcie a derivácia funkcie v bode sú podľa učebných osnov zaradené do 4. ročníka gymnázia.

V tomto článku najprv pripomenieme definície limity a derivácie funkcie v bode, ktoré sa vyskytujú v niektorých gymnaziálnych učebniciach. V ďalšom sa budeme venovať zavedeniu týchto pojmov pomocou spojitosti funkcie v bode. Tomu bol venovaný kvalitatívny výskum, realizovaný na jeseň roku 2003 na Gymnáziu sv. Andreja v Ružomberku. Počas neho sme získali práce žiakov, pomocou ktorých chceme analyzovať reakcie žiakov na tento spôsob zavedenia pojmov.

LIMITA FUNKCIE V BODE

Hecht v učebnici [3] zaviedol pojem limity funkcie f v bode a pre prípad, že funkcia f sa podľa neho "málo líši od nejakej spojitej funkcie, ktorá je v bode a definovaná". Definoval limitu takto:

Definícia 1. *Nech pre funkciu f a otvorený interval M obsahujúci bod a je g taká spojitá funkcia na množine M, že $g(x) = f(x)$ pre všetky $x \in \in M - \{a\}$. Potom limitou funkcie f v bode a nazývame číslo $b = g(a)$.*

V poznámke 2 síce vysvetľuje, že v tejto definícii pojem spojitej funkcie nebol ešte zavedený, ale ho následne zavádza intuitívnym spôsobom:

Funkcia je spojitá na intervale I, ak jej graf na I možno nakresliť jedným ťahom, teda bez toho, aby sme zdvihli pri kreslení tužku.

Na konci užebnice uvádza Cauchyho definíciu limity funkcie v bode.

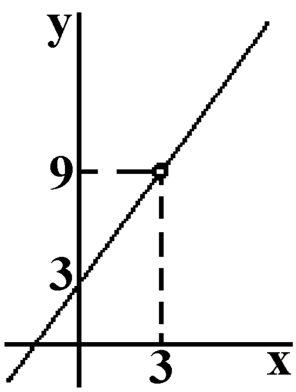
Riečan a kol. v učebnici [7] definuje pojem limity pomocou pojmu okolia bodu.

Definícia 2. *Nech f je funkcia, ktorá je definovaná v okolí bodu a, prípadne okrem bodu a. Funkcia f má v bode a za limitu číslo L, ak k ľubovoľnému okoliu $U(L)$ bodu L existuje také okolie $V(a)$ bodu a, že pre všetky $x \in V(a)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in U(L)$.*

Kluvánek definuje v [6] najprv spojitosť funkcie v bode:
Funkcia f je spojitá v bode a, ak ku každému okoliu V hodnoty $f(a)$ existuje okolie U bodu a také, že pre každé $x \in U$ platí $f(x) \in V$.
Potom odporúča definovať limitu funkcie v bode:
Definícia 3. *Nech f je funkcia a nech a je hromadným bodom jej definičného oboru D. Nech $L \in R$ a F je funkcia definovaná nasledovne:*
1. $F(x) = f(x)$, pre $x \neq a$, $x \in D$,
2. $F(a) = L$.
Potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ práve vtedy, keď $F(x)$ je spojitá v bode a.

Ukážka experimentálneho vyučovania

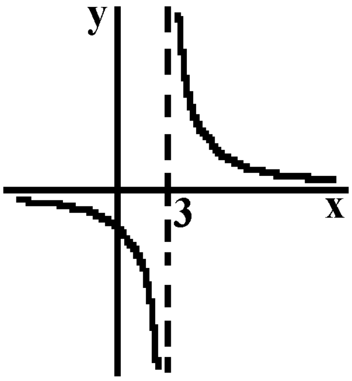
Pomocou definície 3 sme zaviedli pojem limity funkcie v bode počas experimentálneho vyučovania. Žiaci využili pri pri riešení kalkulatívnych úloh grafy funkcií. Ukážeme si niektoré z nich:
Dominik (pri tabuli): $\lim\limits_{x\to 3}(2x+3) =$ $\qquad D(f) = R$
1. $F(x) = 2x + 3$ pre $x \neq 3$,
2. $F(3) = L$.
Učiteľ: Nakreslite graf funkcie $F(x)$ pre $x \neq 3$.
Dominik:



Obr. 1

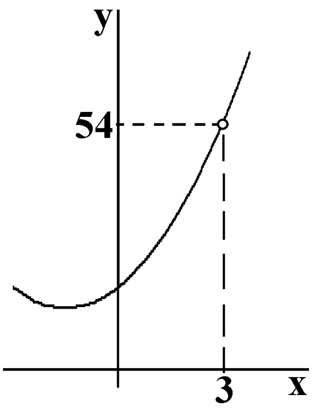
Učiteľ: Čo urobíme, aby sa funkcia stala spojitou?
Miroslava: Vyplníme krúžok.
Učiteľ: Akou funkčnou hodnotou? Čo to znamená pre limitu funkcie v bode 3?

Dominik: 9, preto $\lim\limits_{x\to 3}(2x+3) = 9$.
Erika (pri tabuli): $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x-3} =$
1. $F(x) = \frac{1}{x-3}$ pre $x \neq 3$,
2. $F(3) = L$.



Obr. 2

Učiteľ: Je možné túto funkciu v bode 3 dodefinovať tak, aby sa stala spojitou?
Viacerí z triedy: Nie.
Učiteľ: Čo to znamená pre limitu funkcie v bode 3?
Erika: Limita neexistuje.
Učiteľ: V prvom príklade sme v podstate iba dosadili funkčnú hodnotu a dostali sme hodnotu limity. Čo myslíte, čomu sa rovná $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-54}{x-3}$?
Michal: 0.
Učiteľ: Poďte nás o tom presvedčiť.



Obr. 3

Michal počíta na tabuli:
1. $F(x) = \frac{2x^3-54}{x-3}$ pre $x \neq 3$,
2. $F(3) = L$.
$\frac{2x^3-54}{x-3} = \frac{2(x^3-27)}{x-3} = \frac{2(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3} =$
$= 2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 9\right] = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 18 = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{2}$ Učiteľ: Ako urobíme túto kvadratickú funkciu spojitou (pozri obr. 3)? Čo to znamená pre limitu funkcie v bode 3?
Michal: Doplníme bod [3,54]. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-54}{x-3} = 54$.

Derivácia funkcie v bode

V súčasnosti najčastejšie používanej učebnici Hecht [3] je pojem derivácie funkcie v bode zavádzaný pararelne viacerými spôsobmi. Jeden z nich je v súvislosti s pojmom dotyčnice funkcie v bode, pričom tento prístup nazýva Hecht statickým. Jeho podstatou je hľadanie dotyčnice pomocou sečnice, ktorá pretína graf funkcie v dotykovom bode hľadanej dotyčnice a v inom bode, ktorý sa potom k nemu limitne "približuje". Tento limitný proces súvisí s pojmom limity funkcie, preto ju aj na tomto mieste zavádza. Pomocou nej definuje deriváciu funkcie f v bode x nasledovne.

Definícia 4. *Deriváciou funkcie $f(x)$ v bode a nazývame vlastnú limitu $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, ak táto limita existuje. Deriváciu funkcie $f(x)$ v bode a označujeme $f'(a)$.*

Analogickú definíciu používa Riečan a kol. v [7]: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Potom podrobne rozoberá pojem dotyčnice k parabole, pomocou ktorej zavádza deriváciu.

Hischer a Scheid v [4] zavádza pre funkciu f funkciu smernice sečnice, ktorá je totožná s podielom diferencií:

Definícia 5. *Nech funkcia f je definovaná v bode a a aspoň v jednom bode okrem a. Označme definičný obor funkcie f ako D_f. Funkciu $s_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ definovanú na množine $D_f - \{a\}$ nazývame funkcia smernice sečnice funkcie f v bode a.*

Napríklad pre funkciu $f = x^2$ je $s_{f,a}(x) = x + a$. Potom definuje deriváciu funkcie v bode v súvislosti s pojmom diferencovateľnosti funkcie.

Pojem funkcie smernice sečnice definovanej v definícii 5 sme využili v nasledovnej definícii, ktorá je vyjadrením definície limity $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ v zmysle definície 3.

Definícia 6. *Nech funkcia f je definovaná na intervale I, nech a je bod z intervalu I a nech k je reálne číslo. Ak funkcia smernice sečnice definovaná* *na I*

$$s_{f,a}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pre } x \neq a, \\ k & \text{pre } x = a \end{cases}$$

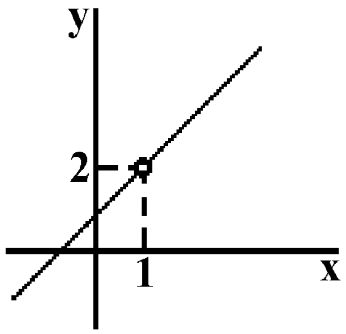
je spojitá v bode a, tak funkcia f je diferencovateľná v bode a. Číslo k sa nazýva derivácia funkcie f v bode x.

Ukážka experimentálneho vyučovania

Pomocou definície 6 sme zaviedli deriváciu funkcie v bode v experimentálnom vyučovaní. Využili sme ako motiváciu úlohu na pohyb. Viaceré zaujímavé fyzikálne úlohy súvisiace s touto problematikou uvádza Eisenmann v [1]. Potom sme pomocou grafov funkcií so žiakmi riešili niektoré kalkulatívne úlohy.
Učiteľ: Určte pomocou definície deriváciu funkcie $y = x^2$ v bode 1.

Robo (pri tabuli): $f(x) = x^2, a = 1,\quad s_{f,1}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{pre } x \neq 1, \\ k & \text{pre } x = 1. \end{cases}$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \qquad s_{f,1}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pre } x \neq 1, \\ k & \text{pre } x = 1. \end{cases}$$



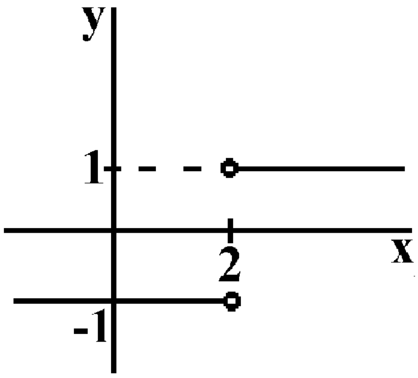
Obr. 4

Učiteľ: Ako dodefinujeme túto funkciu, aby sa stala spojitou?
Miroslava: Vyplníme krúžok.
Učiteľ: Akou funkčnou hodnotou?
Ivan: 2.
Učiteľ: Čo to bude znamenať pre hodnotu derivácie funkcie x^2 v bode 1?
Robo: Bude 2.
Učiteľ: Zatiaľ sme hovorili o funkciách, ktoré deriváciu majú. Teraz si

ukážeme funkciu, ktorá nemá deriváciu aspoň v jednom bode: $f(x) = |x-2|$, $f'(2) =?$

Pavol (pri tabuli): $s_{f,2}(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & \text{pre } x \neq 2, \\ k & \text{pre } x = 2. \end{cases}$

pre $x \in (2; \infty)$ $\quad \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} = 1$
pre $x \in (-\infty; 2)$ $\quad \frac{|x-2|}{x-2} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$



Obr. 5

Učiteľ: Môžem túto funkciu "dodefinovať" tak, aby sa stala spojitou (pozri obr. 5)?
Lukáš, Lucia: Nie, nedá sa.
Učiteľ: Čo to znamená pre deriváciu funkcie v bode 2?
Pavol: Neexistuje.

Záver

Domnievame sa, že v školskej praxi sa nevenuje dostatočná pozornosť pochopeniu a problémom existencie limity a derivácie funkcie v bode.

Zo žiackych riešení úloh sme zistili, že spôsob zavedenia limity a derivácie funkcie v bode, ktorý sme použili v experimentálnom vyučovaní, uľahčuje žiakom porozumieť týmto pojmom, príslušné úlohy pochopiť a úplne vyriešiť.

Využitie grafov funkcií umožňuje riešiť kalkulatívne úlohy na limitu a deriváciu funkcie v bode bez mechanického dosadzovania hodnôt premenných v príslušných výrazoch. Grafy funkcií uľahčujú nielen určiť hodnotu limity alebo derivácie funkcie v bode, ale aj vizuálne ukázať ich neexistenciu. To uvádza aj Tkačik v [8].

Literatúra

1. Eisenmann, P.: *Propedeutika infinitezimálního počtu,* Acta Universitatis Purkynianae - Studia Mathematica 82, Ústí nad Labem, 2002.
2. Hauke, F.: *Schülerinnen- und Schülervorstellungen vom Grenzwertbegriff beim Ableiten.* Dizertačná práca. Universität Paderborn, 2001. In: http://ubdata.uni-paderborn.de/ediss/17/2001/friedric/index.htm.
3. Hecht, T.: *Matematická analýza. Logika.* Bratislava, Orbis Pictus Istropolitana, 2000.
4. Hischer, H., Scheid, H.: *Grundbegriffe der Analysis: Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht.* Heidelberg; Berlin; Oxford, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.
5. Hronec, J.: *Diferenciálny a integrálny počet I,* Bratislava, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1957.
6. Kluvánek, I.: *Čo nie je dobré vo vyučovaní matematickej analýzy?*, Matematické obzory **37** (1991), 47–66.
7. Riečan, B. a kol.: *Matematika pre 4. ročník gymnázia.* Bratislava, SPN, 1987.
8. Tkačik Š.: *Spojitosť a limity trochu inak*, Zborník konferencie Setkání kateder matematiky České a Slovenské republiky připravující budoucí učitele, Ústí nad Labem (2004), 85 - 89.

Katedra matematiky a fyziky
Pedagogická fakulta
Katolícka Univerzita v Ružomberku
Nám. Andreja Hlinku 56,
Sk - 034 01 Ružomberok
Slovakia
Email address: `guncaga@fedu.ku.sk`