LIMITA POSTUPNOSTI A SÚČET NEKONEČNÉHO RADU - UKÁŽKA KVALITATÍVNEHO A KVANTITATÍVNEHO VÝSKUMU

Ján Gunčaga

Abstract. This paper is devoted to series, their sums and limits of sequences as taught at grammar schools. We present some qualitative and quantitative research results of in this area. We analyze various solutions by pupils and point out most frequent errors and some problems related to understanding of sums of series and limits of sequences. We mention some difficulties we have encountered when carrying out our research.

Tematické celky limita postupnosti a súčet nekonečného radu sú preberané na gymnáziu obvykle začiatkom 4. ročníka. Patria medzi náročné časti stredoškolskej matematiky. Cieľom výskumu, ktorý bol realizovaný na jeseň roku 2002 na Gymnáziu sv. Andreja v Ružomberku, bolo analyzovať práce žiakov, hľadať najčastejšie chyby a ich príčiny. Ďalšim cieľom bolo navrhnúť spôsob ako uľahčiť a priblížiť tieto tematické celky študentom, riešiť netradičné úlohy. V tomto článku bude predstavená časť vyhodnotenia záverečnej tematickej previerky, v ktorom bola využitá kombinácia metód kvalitatívneho a kvantitatívneho výskumu.

Metódy a hypotézy kvantitatívneho výskumu

Pri spracovaní tematickej previerky boli použité aj viaceré štatistické metódy vyhodnotenia neštandardizovaných didaktických testov.

Obtiažnosť úlohy možno podľa Tureka [6, str. 222] a Soltysa [4, str. 54] definovať ako pomer súčtu bodov získaných za danú úlohu skupinou žiakov a maximálnemu súčtu bodov, ktoré za danú úlohu skupina žiakov mohla dosiahnuť. To môžeme zapísať a upraviť nasledovne

$$p_i = \frac{1}{n.B_i}\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = \frac{1}{B_i}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\right) = \frac{\overline{u_i}}{B_i},$$

kde u_{ij} je počet bodov získaných j-tym žiakom za i-tu úlohu, p_i je obtiažnosť i-tej úlohy a n je celkový počet žiakov, ktorí písali previerku. B_i je maximálny počet bodov za i-tu úlohu a $\overline{u_i}$ je aritmetický priemer bodov, ktoré získali žiaci za i-tu úlohu.

Soltys [4, str. 54] priraďuje hodnotám p_i nasledujúcu obtiažnosť:

p_i	$0,0-0,20$	$0,21-0,40$	$0,41-0,60$	$0,61-0,80$	$0,81-1,0$
úlohy	veľmi ťažké	ťažké	strednej obtiažnosti	ľahké	veľmi ľahké

Disperziu D_i i-tej úlohy a *absolútne skóre* x_j j-teho žiaka v previerke s k úlohami možno vypočítať pomocou známych vzťahov

$$D_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(u_{ij} - \overline{u_i})^2 \qquad x_j = \sum_{i=1}^{k} u_{ij}$$

Disperziu skóre dostaneme zo vzťahu

$$D = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2, \text{ kde } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

Smerodajnú odchýlku skóre určíme podľa vzťahu $s = \sqrt{D}$. Keďže tematické previerky nebudú skórované binárne, ich *reliabilitu* r vypočítame podľa Tureka [6, str. 226] pomocou *Cronbachovho vzťahu*

$$r = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{k} D_i\right)$$

Podľa Soltysa [4, str. 57] pomocou reliability r môžme určiť aj *štandardnú chybu* s_t podľa vzťahu $s_t = s\sqrt{1-r}$.

Úlohy v previerkach boli rozdelené na dve skupiny. Na skupinu kalkulatívnych úloh a na skupinu úloh na porozumenie a pochopenie pojmov. Pre obe skupiny úloh bol zistený súčet bodov každého žiaka. Nech i-ty žiak dosiahne za prvú skupinu úloh x_i bodov a za druhú skupinu úloh y_i bodov. Pearsonov koeficient korelácie r_p vypočítame podľa vzťahu, ktorý je uvedený v [6, str. 226].

Ak *Pearsonov koeficient korelácie* medzi týmito hodnotami nedosiahne kritickú hodnotu $r_n(0,05)$ (testujeme na hladine významnosti 0,05), tak možno konštatovať, že úspešnosť študentov (v danej študijnej skupine alebo triede) v riešení týchto dvoch skupín úloh nemá vzájomnú súvislosť. Ak by koeficient korelácie prekročil kritickú hodnotu, túto hypotézu môžeme zamietnuť.

Pearsonov koeficient korelácie je podľa Tureka [6, str. 226] výhodné použiť aj na určenie *validity*. Vyjadruje ju ako koeficient korelácie medzi výsledkami previerky a iným akceptovateľným meradlom. Pri žiakoch gymnázia boli ako meradlo použité známky na polročnom vysvedčení.

Všetky vyššieuvedené štatistické charakteristiky možno získať využitím počítačového programu *Excel*.

Analýza chýb - metóda kvalitatívneho výskumu

Podľa Gavoru [2, str. 38] je cieľom kvalitatívne orientovaného výskumu porozumieť zmyslu javov, prípadne odhaľovať nové skutočnosti, ktoré môžu prispieť pri budovaní novej teórie.

Bikner a Herget v [1] venujú zvláštnu pozornosť chybám žiakov vo vyučovaní matematickej analýzy. Svoju pozornosť sústredili na pojmy neurčitý integrál, limita postupnosti a derivácia. Uvádzajú aj niektoré typické chyby žiakov. Napríklad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} sin = sin?? \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 1}{1} = \sin 1$$

Podobným spôsobom boli vyhľadavané chyby žiakov aj v ich riešeniach tematickej previerky.

Jedným zo zdrojov týchto chýb môže byť podľa Knocheho [3], že žiak sa učí matematiku "viackrát". Raz na prvom, potom na druhom stupni, nakoniec na gymnáziu, prípadne aj na vysokej škole. Ak vyučovanie matematiky je len preúčanie, rozšírenie alebo zúženie pojmov, ktoré sú k dispozícii, tak z psychologického hľadiska môže dôjsť k interferencii a k narušeniu ich poznatkovej štruktúry.

Zadanie a štatistické spracovanie

Tematická previerka so zameraním na pojmy súčet nekonečného radu a limita postupnosti bola písaná s 19 žiakmi 4.ročníka gymnázia dňa 15.10.2002. Vzhľadom na malý priestor triedy boli žiaci rozdelení na dve skupiny (**A**, **B**). Podobne ako v [5] boli tieto skupiny samostatne štatisticky spracované. Ako ukážku uvedieme úlohy **A** skupiny:

1. Nech $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť reálnych čísel. $\lim_{n\to\infty} u_n = L$ práve vtedy, keď

A) $\exists \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$
B) $\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$
C) $\forall \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \exists n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$
D) $\exists \varepsilon > 0\ \forall m \in N\ \forall n \in N$, že pre $n \geq m$ platí $|u_n - L| < \varepsilon$

2. Upravte do tvaru zlomku číslo $0,\overline{27}$.

3. Zistite, či je daný rad konvergentný. Ak áno, nájdite jeho súčet.

$$a)\quad \left(-\frac{10}{7}\right) + \left(-\frac{10}{7}\right)^2 + \left(-\frac{10}{7}\right)^3 + \dots \qquad\qquad b)\quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3^j + 5^j}{7^j}$$

4. Vypočítajte

$$a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+2n+2} \qquad b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n+1).(n^2+1)}$$

$$c)\quad \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \text{kde} \quad a_n = \begin{cases} 10 & \text{pre } n \leq 10, \\ \frac{1}{n} & \text{pre } n > 10. \end{cases}$$

V úlohách 5 až 7 aj zdôvodnite svoju odpoveď:

5. Prirodzených čísel n, ktoré spĺňajú podmienku

$$1 - \varepsilon < \frac{n+1}{n} < 1 + \varepsilon, \qquad \varepsilon \in R \ \wedge \ \varepsilon > 0$$

A) je nekonečne veľa B) je konečne veľa

6. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \geq m$ spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 1,001$

A) áno B) nie

7. Existuje prirodzené číslo m, pre ktoré platí, že každé prirodzené číslo $n \geq m$ spĺňa nerovnosť $\frac{n+1}{n} < 0,999$

A) áno B) nie

Skórovanie (bodovanie) úloh bolo nasledovné:

Úloha **1**. správna odpoveď - 1 bod

2. maximálne 3 body, ktoré boli rozdelené nasledovne:
Predpokladáme, že žiaci budú riešiť úlohu pomocou prevodu zlomku s desatinným rozvojom na geometrický rad (za správny prevod zlomku na geometrický rad alebo správne určenie prvého člena a kvocientu geometrického radu - 1 bod, za správne dosadenie do vzťahu pre súčet nekonečného geometrického radu - 1 bod, za správny výsledok - 1 bod).

3a. max. 2 body (správne určenie prvého člena a kvocientu geometrického radu - 1 bod, za určenie divergentnosti radu - 1 bod).

3b. max. 4 body (zápis radu v tvare súčtú dvoch geometrických radov - 1 bod, za správne dosadenie do vzťahu pre súčet nekonečného geometrického radu pri oboch radoch - 1 bod, za správne určenie súčtu aspoň jedného z radov - 1 bod, za správny výsledok - 1 bod).

4a. max. 2 body (správne predelenie čitateľa a menovateľa zlomku výrazom n^2 - 1 bod, za správny výsledok - 1 bod).

4b. max. 3 body (za správne roznásobenie menovateľa - 1 bod, správne predelenie čitateľa a menovateľa zlomku výrazom n^3 - 1 bod, za správny výsledok - 1 bod).

4c., **5**., **6**., **7**. každá max. 2 body (za zdôvodnenie alebo správnu úpravu nerovnice - 1 bod, za správnu odpoveď - 1 bod).

Klasifikačná stupnica bola nasledovná:

1 ... 23 - 21 bodov
2 ... 20 - 17 bodov
3 ... 16 - 12 bodov
4 ... 11 - 6 bodov
5 ... 5 - 0 bodov

A skupina - body získané žiakmi za jednotlivé úlohy:
Validita r_v=0,760 bola vypočítaná ako Pearsonov koeficient korelácie medzi známkou z_p z previerky a známkou z_v na polročnom vysvedčení.
Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie: $r_9(0,05)$=0,6664
Percento úspešnosti: 49,28
Aritmetický priemer známok $\overline{z_p}$= 3,44 $\overline{z_v}$= 3,22
Disperzia skóre $D = 27{,}556$
Smerodajná odchýlka $s = 5{,}249$

p.č.	meno št./ úlohy	1	2	$3a$	$3b$	$4a$	$4b$	$4c$	5	6	7	$\sum$	z_p	z_v
1	Barbora	0	3	2	4	2	3	0	0	2	2	18	2	3
2	Blažej	1	2	2	0	2	3	1	2	2	2	17	2	2
3	Dávid	1	3	2	3	0	1	0	2	2	2	16	3	3
4	Lucia	1	3	2	1	1	2	0	0	2	2	14	3	3
5	Mária	1	0	1	0	1	3	1	2	0	2	11	4	3
6	Richard	0	3	2	0	1	3	1	0	0	0	10	4	4
7	Lýdia	1	3	2	1	0	0	0	2	0	0	9	4	3
8	Zdenka	1	3	1	1	0	0	0	0	0	0	6	4	4
9	Juraj	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	5	4

A skupina - disperzie a obtiažnosti jednotlivých úloh:

č.úlohy	B_i	$\overline{u_i}$	p_i	obtiažnosť	D_i
1	1	$0,67$	$0,667$	ľahká	$0,222$
2	3	$2,22$	$0,741$	ľahká	$1,506$
$3a$	2	$1,67$	$0,833$	veľmi ľahká	$0,222$
$3b$	4	$1,11$	$0,278$	ťažká	$1,877$
$4a$	2	$0,78$	$0,389$	ťažká	$0,617$
$4b$	3	$1,67$	$0,556$	stredná	$1,778$
$4c$	2	$0,33$	$0,167$	veľmi ťažká	$0,222$
5	2	$0,89$	$0,444$	stredná	$0,988$
6	2	$0,89$	$0,444$	stredná	$0,988$
7	2	$1,11$	$0,556$	ľahká	$0,988$
$\sum$	23	$11,33$	–	–	$9,407$

Reliabilita $r = 0{,}732$
Štandardná chyba $s_t = 2{,}719$

Úlohy 2, 3a, 3b, 4a, 4b sú kalkulatívne (skupina úloh I) a úlohy 1, 4c, 5, 6, 7 sú problémové úlohy zamerané na pochopenie pojmov (skupina úloh II). Na záver si uvedieme štatistické vyhodnotenie vzťahu medzi súčtom bodov v prvej a druhej skupine úloh.

p.č. žiaka	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	14	9	9	9	5	9	6	5	1
II	4	8	7	5	6	1	3	1	0

Pearsonov koeficient korelácie medzi I a II je r_p=0,447. Kritická hodnota Pearsonovho koeficientu korelácie je $r_9(0,05)$=0,6664. Hodnota r_p nedosahuje kritickú hodnotu, preto môžeme zamietnuť hypotézu o nenulovej korelácii medzi súčtami bodov získaných žiakmi v oboch skupinách úloh.

Kvalitatívna analýza niektorých úloh

Ako ukážku budeme analyzovať úlohy 4a, 5, 6 a 7. Úloha 4a bola ťažká pre žiakov, aj keď o niečo ľahšia ako úloha 3b. Problémom pre mnohých žiakov bola odlišnosť stupňa polynómu v čitateli a v menovateli. Celkom správne vyriešili úlohu len dvaja žiaci (Blažej, Barbora). Barbora vydelila čitateľa aj menovateľa výrazom n^2. Blažej dvakrát po sebe vydelil čitateľa a menovateľa výrazom n. Zdenka úlohu neriešila. Richard a Mária vydelili podobne ako Blažej čitateľa aj menovateľa výrazom n, ale nevedeli ďalej pokračovať. Lucia po predelení výrazom n^2 nevedela pokračovať. Lýdia, Juraj a Dávid sa dopustili chýb hlavne pri predelení:

Juraj: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+0}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+0}{2} = \frac{1+0}{0} = 1$$

Dávid: $$\frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n.n}{n}+\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{n+2n+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{1+2+0} = \frac{1}{3}$$

Lýdia: $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n}+\frac{2}{n}} = \frac{1+0}{0+2+0} = \frac{1}{2}$$

Tieto riešenia svedčia o nedostatkoch vo vedomostiach žiakov pri úprave algebraických a v prípade Juraja aj číselných výrazov.

Úlohy 5, 6 a 7 boli pre žiakov skupiny stredne ťažké. Približne polovica žiakov vyriešila každú z úloh správne. Juraj úlohy neriešil a ostatní uviedli nesprávnu odpoveď.

Záver

Z analýz prác žiakov zisťujeme , že pri preberaní problematiky súčtu nekonečného radu a limity postupnosti, musia žiaci využívať poznatky z rôznych tematických celkov matematiky ako sú výroky s kvantifikátormi, konečné a nekonečné množiny, úprava algebrických a číselných výrazov, operácie s mocninami. Mnohí žiaci majú nedostatky v týchto tematických celkov a u najslabších z nich aj vo všetkých súčasne. To je potom príčinou mnohých žiackych chýb pri riešení úloh na limitu postupnosti a súčet nekonečného radu. V školskej praxi a ani v učebniciach matematiky sa nevenuje dostatočná pozornosť pochopeniu týchto pojmov. Úspešnosť žiakov pri riešení kalkulatívnych úloh ešte totiž nezaručuje, že došlo aj k hlbšiemu pochopeniu týchto pojmov.

Literatúra

1. Bikner A., Herget W., Mathematik lehren **36** (1984), 54–57.
2. Gavora P., *Úvod do pedagogického výskumu*, Bratislava, UK, 2001.
3. Knoche N., *Analysisunterricht unter dem Lernziel "Mathematische Grundbildung" In:*, Disputationes Scientificae Univesitatis Catholicae in Ružomberok **1** (2002), 32–39.
4. Soltys D., Szmigiel M.K., *Doskonalenie kompetencji nauczycieli w zakresie diagnozy edukacyjnej*, Kraków, Zamiast korepetycji, 1999.
5. *Test M-2 z matematiky. Celoslovenské výsledky Monitor 2002*, Bratislava, Exam, 2002.
6. Turek I., *Kapitoly z didaktiky vysokej školy*, Košice, TU, 1998.

Katedra matematiky a fyziky
Pedagogická fakulta
Katolícka Univerzita v Ružomberku
Nám. Andreja Hlinku 56,
Sk - 034 01 Ružomberok
Slovakia
Email address: `guncaga@fedu.ku.sk`